lieu la séance publique. En sorte que la communication, par cela seul, a été retardée d'une manière que je regarde aujourd'hui comme très fâcheuse, n'ayant pu y remédier par la publication dans un journal scientifique, quoique je l'aie essayé, et cette publication ayant été reculée jusqu'ici par une cause indépendante de ma volonté.

» J'ai ajouté qu'en donnant ces explications à l'Académie, je ne prétendais nullement juger, entre deux personnes dont j'estime également le talent, la question de priorité, sur laquelle, si je ne me trompe, ni l'une ni l'autre ne réclament; mais ce que j'ai pu assurer, c'est que bien certainement la lettre de M. Coste m'était parvenue et aurait pu être communiquée à l'Académie avant que ne fût remise la note dont venait de parler M. le Secrétaire (1), et que M. Owen avait bien voulu m'envoyer aussi. »

MÉCANIQUE. — *Extrait de la première partie d'un Mémoire sur le Mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à leur rotation et à l'influence du mouvement diurne de la Terre ; par* M. Poisson.

« Je diviserai ce Mémoire en deux parties : dans l'une, le projectile sera considéré comme un point matériel, c'est-à-dire comme un corps dont la masse est réunie au centre de gravité, et il s'agira d'apprécier l'influence du mouvement de la Terre sur celui de ce corps; dans l'autre, on aura égard à la forme et aux dimensions du mobile, dans la vue de déterminer, principalement en ce qui concerne les projectiles de l'artillerie, les modifications que leur rotation peut produire dans leur mouvement de translation. C'est la première de ces deux parties que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie.

» La théorie de la résistance que les fluides en général, et l'air en particulier, opposent au mouvement des corps qui les traversent, n'est, jusqu'à présent, qu'une ébauche très imparfaite. On y assimile cette force à une suite continuelle de chocs du mobile contre les particules du fluide, qui disparaissent et s'anéantissent pour ainsi dire, à mesure qu'elles ont été atteintes par ce corps, et qu'elles lui ont enlevé de petites quantités de mouvement, proportionnelles à leurs masses et à sa vitesse. Newton, à qui l'on doit cet essai de théorie, en avait conclu qu'abstraction faite de la rotation du mobile, et pour une sphère, par exemple, la résistance de l'air est égale au poids d'un cylindre de ce

(1) *Voyez* p. 645 du présent volume, et à la p. 638 la communication de M. Coste.

fluide, ayant pour base et pour hauteur, le grand cercle de la sphère et la hauteur due à sa vitesse. Mais les expériences qu'il fit sur la chute des corps dans l'air, lui montrèrent bientôt l'inexactitude de ce résultat, et l'ont conduit à réduire de moitié, cette mesure de la résistance; on a jugé, depuis, cette réduction trop forte; et Borda a conclu, de ses propres observations, que la mesure de la résistance devait être seulement abaissée aux trois cinquièmes de sa valeur théorique. D'après la théorie de Newton, modifiée par l'expérience, la force retardatrice, rapportée à l'unité de masse, d'une sphère qui se meut dans l'air, a pour expression le carré de la vitesse de ce corps, divisé par son diamètre et par le rapport de sa densité à celle du fluide, et multipliée par un coefficient numérique sur lequel tous les auteurs de Balistique ne sont pas d'accord. Suivant Lombard (1), et en s'appuyant sur les expériences de Borda, ce coefficient serait égal à environ neuf quarantièmes. Mais la loi véritable de la résistance en fonction de la vitesse, est beaucoup plus compliquée : dans les mouvements qui sont, ou très rapides, ou très lents, elle paraît s'écarter notablement de la proportionnalité au carré de la vitesse; elle croît suivant un plus grand rapport dans le cas des très grandes vitesses; et au contraire, elle est sensiblement proportionnelle à la simple vitesse, quand il s'agit de petits mouvements, comme les très petites vibrations du pendule à secondes (2).

» Pour déterminer directement et sans aucune hypothèse, la loi de la résistance qu'un corps éprouve en se mouvant dans un fluide, il faudrait considérer à la fois ce mouvement et celui que le mobile communique au fluide : par l'effet de ce double mouvement, le fluide exerce à chaque instant une certaine pression, en chaque point du mobile et normale à sa surface; cette pression, différente de celle qui a lieu dans l'état de repos, est la résistance proprement dite que le mobile éprouve, et à laquelle il faudrait encore joindre la force tangente à la surface, provenant du frottement de ce corps contre la couche fluide qui le touche. C'est ce que j'ai pu faire, en effet, dans mon Mémoire sur les *Mouvements simultanés du pendule et de l'air environnant* (3), et ce qui m'a conduit à déduire de la théorie, la correction nouvelle que M. Bessel a fait subir, d'après l'expérience, à la longueur du pendule à secondes.

(1) *Traité du mouvement des projectiles*, page 99.
(2) *Additions à la Connaissance des Tems*, année 1834, page 18.
(3) Tome XI des *Mémoires de l'Académie des Sciences*.

J'essaierai, par la suite, d'étendre mon analyse au cas du mouvement progressif des projectiles dans l'air, et de déterminer, s'il m'est possible, la pression que le fluide, qu'ils mettent lui même en mouvement, exerce sur leur surface, ou la résistance qu'ils éprouvent, envisagée sous le point de vue que je viens d'indiquer. Je n'ai pas besoin de dire combien la connaissance de cette loi, exacte et générale, serait importante dans beaucoup de questions, et, par exemple, dans le problème de la Balistique. Mais pour l'objet que je me suis proposé dans ce Mémoire, j'ai pu admettre, comme étant suffisamment approchée, la loi ordinaire de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

» C'est aussi Newton qui a donné le premier exemple de la détermination du mouvement d'un corps pesant dans un milieu résistant. Quand le mouvement est vertical, il a résolu le problème, en supposant la résistance proportionnelle, soit à la vitesse, soit à son carré; mais lorsque le projectile est lancé dans l'air suivant une direction quelconque, il s'est borné à considérer le cas de cette force proportionnelle à la simple vitesse, en observant toutefois que ce cas n'était pas celui de la nature. Les deux équations que Newton a dû intégrer pour déterminer les composantes horizontale et verticale de la vitesse à un instant quelconque, sont linéaires, du premier ordre et à coefficients constants; et les deux inconnues y sont séparées, de sorte que ces deux équations se résolvent indépendamment l'une de l'autre, et que leur solution ne suppose réellement qu'une simple intégration immédiate. Il n'en est plus de même dans le cas de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse : les deux inconnues entrent à la fois dans chacune des équations du mouvement, qui ne sont plus linéaires; et ce n'est que par une combinaison particulière, que l'on parvient à y séparer les variables et à les ramener aux quadratures, ce que l'on regarde comme la solution complète du problème. Elle est due à Jean Bernouilli, qui l'a donnée dans les actes de Leipzig de 1719, plus de trente ans après la solution de Newton, et à une époque où le calcul intégral avait déjà fait de grands progrès. Cependant, Euler, au commencement de son mémoire sur cette matière (1), exprime sa surprise de voir que Newton se soit arrêté au cas de la résistance proportionnelle à la simple vitesse, et n'ait pas considéré le cas de la nature; lui, dit-il, qui a résolu bien d'autres problèmes plus difficiles. On sait d'ailleurs que la question de la trajectoire dans un milieu résistant en

(1) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1753.

raison du carré de la vitesse, fut proposée comme un défi, aux géomètres du continent, par un Anglais nommé Keil, qui croyait le problème insoluble, parce que son illustre compatriote ne l'avait pas résolu. Maintenant le calcul numérique des intégrales qui expriment le temps et les deux coordonnées du mobile en fonctions d'une quatrième variable, s'effectue aussi simplement que la question le comporte, et en poussant les approximations aussi loin qu'on veut. On en peut voir un exemple dans les *Exercices de calcul intégral*, de Legendre (1), où ces coordonnées sont calculées à moins d'un cent-millième de leurs valeurs.

» Indépendamment de la force centrifuge provenant de la rotation de la Terre, et qui influe sur le mouvement des corps pesants, en diminuant la gravité, d'une quantité variable avec la latitude; cette rotation produit encore, dans ces mouvements, certaines déviations qu'il est intéressant de connaître, soit en elles-mêmes, soit pour savoir jusqu'à quel point elles peuvent influer sur la trajectoire des projectiles, et s'il est nécessaire d'y avoir égard dans la pratique de l'artillerie. Plusieurs physiciens ont mesuré, avec autant de précision qu'il a été possible, les petites distances dont les corps qui tombent d'une hauteur considérable, s'écartent du pied de la verticale. Laplace et M. Gauss ont soumis cette question au calcul; mais en intégrant les équations de ce mouvement à très peu près vertical, ils ont fait abstraction de la résistance de l'air, qui peut cependant avoir quelquefois une influence extrêmement grande sur le résultat. J'ai donc pensé qu'il serait utile de reprendre ce problème en entier, et d'en étendre la solution au cas général où le projectile est lancé dans l'air, avec une vitesse et suivant une direction quelconques.

» Pour cela, j'ai d'abord formé les équations différentielles du mouvement absolu dans l'espace, en rapportant à des axes fixes les coordonnées du mobile; puis j'en ai déduit les équations du mouvement apparent, tel que nous l'observons près de la surface du globe, ou rapporté à des axes fixes à cette surface, qui participent, ainsi que nous, à la rotation de la Terre. Ces équations différentielles sont très compliquées; mais, en prenant la seconde de temps pour unité, la vitesse angulaire du mouvement diurne est une très petite fraction; ce qui permet de les réduire à une forme plus simple. On en déduit alors quelques conséquences générales, dont voici les énoncés.

» Le mouvement de la Terre empêche un liquide, contenu dans un

---

(1) Tome Ier, page 336.

vase et tournant avec une vitesse constante autour d'un axe vertical, de parvenir rigoureusement à une figure permanente, qui serait celle d'un paraboloïde de révolution, si la Terre était considérée comme immobile.

» Si un corps se meut sur une courbe donnée et attachée fixement à la surface du globe, l'équation différentielle de son mouvement ne contient pas la vitesse de rotation de la Terre, et ce mouvement est le même, en conséquence, que si la Terre était en repos. Ainsi, pour une valeur donnée de la pesanteur, résultante de la figure et de la rotation du sphéroïde terrestre, les oscillations du pendule sont les mêmes dans tous les *azimuts* autour de la verticale; résultat qu'il était important de démontrer, vu le degré de précision que l'on apporte maintenant dans la détermination du pendule à secondes, en différents lieux de la Terre. Mais le mouvement diurne et la direction du plan des oscillations ont une petite influence sur la tension variable que le fil éprouve pendant qu'elles ont lieu, et qui n'est pas rigoureusement la même dans tous les azimuts.

» Enfin, quand un projectile est lancé dans l'air suivant une direction quelconque, la rotation de la Terre n'augmente ni ne diminue la distance à laquelle il se trouve, à chaque instant, du plan parallèle à l'équateur, mené par son point de départ.

» Avant de chercher les intégrales des équations du mouvement apparent, dans le cas général d'une grandeur et d'une direction quelconques de la vitesse initiale, j'ai considéré les cas particuliers les plus simples. Le premier est celui où le mobile part d'un point situé à une hauteur donnée au-dessus du sol, et est abandonné à l'action de la pesanteur, sans qu'on lui imprime aucune vitesse particulière, de sorte qu'il commence à tomber verticalement. La vitesse à son point de départ, provenant de la rotation de la Terre et à laquelle il participe, étant plus grande que celle qui répond au pied de la verticale, on comprend que le mobile, quand il a atteint le sol, doit s'écarter du pied de cette ligne, à l'*est* ou dans le sens du mouvement vrai de la Terre. Mais le calcul peut seul donner la mesure de cet écart, surtout lorsqu'on a égard à la résistance de l'air : il fait voir, en effet, que la déviation a lieu vers l'*est*, et qu'elle est nulle dans le sens du méridien. Pour comparer à l'expérience la formule qui en exprime la grandeur, j'ai choisi les observations de ce genre qui ont été faites en 1833, par M. le professeur Reich, dans les mines de la Saxe. La hauteur de la chute était de 158 mètres et demi; et M. Reich a conclu de la moyenne de 106 expériences, une déviation à l'*est*, de 28 millimètres et un tiers. Il a aussi trouvé à très peu près six secondes pour le temps de la chute; au moyen de cette donnée, j'ai pu calculer, sans aucune hypothèse, le coefficient de la résistance de l'air que le mobile a dû éprouver; et, ensuite, la formule a donné 27 millimètres et demi pour la déviation; ce qui diffère de l'expérience de moins d'un millimètre. Dans le vide, cette déviation ne surpasserait pas d'un dixième de millimètre, celle qui a lieu dans l'air; en sorte que dans cet exemple, la résistance de l'air n'a eu qu'une influence insensible.

» Quand le projectile part de la surface de la terre, et qu'il est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse donnée, on conçoit que, pendant la durée de son élévation, il doit s'écarter de la verticale, vers l'*ouest*, ou en sens contraire de la rotation de la Terre. Il semble qu'ensuite, durant sa chute, il devrait se rapprocher de cette ligne, et retomber à peu près à son point de départ; mais il n'en est point ainsi. Parvenu au point le plus haut de sa trajectoire, et lorsqu'il a perdu toute sa vitesse verticale, le projectile, en déviant vers l'*ouest*, a aussi acquis une vitesse horizontale dans le même sens, en vertu de laquelle il continue à dévier dans ce sens, du moins pendant une partie de sa chute. La difficulté analytique que ce second cas présente, est de raccorder, pour ainsi dire, les deux mouvements successifs, ascendant et descendant, du projectile, qui sont exprimés par des formules très différentes, lorsque l'on tient compte de la résistance de l'air. Pour appliquer à un exemple la formule relative à la déviation totale du mobile, quand il est retombé sur le sol, j'ai supposé que ce corps fût une balle, tirée verticalement par un fusil d'infanterie, avec une vitesse d'environ 400 mètres par secondes. La grandeur de cette déviation varie beaucoup avec celle de la résistance de l'air; en donnant successivement au coefficient de cette résistance des valeurs qui soient entre elles comme quatre et trois, on trouve des déviations vers l'*ouest* dans les deux cas, mais d'environ un et trois décimètres: dans le vide, cette déviation s'élèverait à une cinquantaine de mètres; en sorte qu'elle est réduite aux cinq centièmes de sa valeur, par la plus grande des deux résistances.

» J'ai encore examiné, en particulier, le cas où la vitesse initiale du projectile est presque horizontale, ce qui comprend, pour fixer les idées, le tir à la *cible*. On trouvera dans mon Mémoire les formules qui s'y rapportent et qui en expriment toutes les circonstances, selon que le tir a lieu vers tel ou tel point de l'horizon. Je me bornerai à dire que la vitesse initiale étant toujours d'environ 400 mètres, et la distance de la cible, placée au *but en blanc*, égale à 200 mètres, les déviations horizontale et verticale de la balle, dues au mouvement de la Terre, s'élèveraient à peine à un demi-centimètre, c'est-à-dire qu'elles n'influent pas sensiblement sur la justesse du tir et sont inutiles à considérer dans la pratique. Ces déviations sont également négligeables dans le tir du canon, et dans tous les mouvements qui ont lieu suivant une direction à peu près horizontale.

» Dans le cas général, les effets que produit le mouvement de la Terre dans le mouvement d'un projectile, sont d'abord des accroissements positifs ou négatifs, soit de l'intervalle de temps que le mobile emploie à aller de son point de départ au point où il retombe sur le terrain, soit de la distance du second point au premier, que l'on appelle la *portée horizontale*. Les signes de ces accroissements dépendent de la direction du plan vertical dans lequel le projectile est lancé : il y a augmentation dans une direction et diminution dans une autre; leurs valeurs sont exprimées par des intégrales doubles, dont le calcul numérique serait très pénible. Le mouvement diurne fait, en outre, sortir le mobile du plan vertical où il a été projeté; ce qui donne lieu à une déviation horizontale, dont la valeur se compose de deux parties distinctes, exprimées aussi par des intégrales doubles. L'une de ces déviations partielles est indépendante de la direction du plan vertical; elle a toujours lieu à droite de l'observateur placé au point de départ et tourné vers la trajectoire; à notre latitude, on peut la considérer comme étant l'effet principal de la rotation du globe; et, heureusement, on en obtient des limites plus faciles à calculer que sa valeur même, qui se réduiront en nombres, si l'on veut, au moyen de la longueur de la portée et de la durée du trajet, données par l'observation, et suffiront pour apprécier la grandeur de la déviation. En appliquant, par exemple, ces limites au tir de la bombe, tel qu'il a lieu dans les exercices des *polygones*, c'est-à-dire sous l'angle de 45°, avec une vitesse initiale de 120 mètres par seconde, qui donne une portée d'environ 1200 mètres, pour un projectile de 27 centimètres de diamètre et du poids de 51 kilogrammes (1); on trouve que la déviation du point de chute sera comprise entre 90 et 120 centimètres, lorsqu'on tirera dans un plan vertical, tangent au *parallèle* du point de départ. Elle aura lieu vers le *midi*, quand on tirera vers l'*est*, et vers le *nord*, si l'on tire vers l'*ouest*. En l'évaluant à un mètre, et observant qu'un tel écart à la distance de 120 mètres, répond à un angle d'à peu près trois minutes, il s'ensuit

(1) La bombe de 10 pouces et de 104 livres.

que, pour atteindre plus sûrement le but, il faudrait tirer à gauche du plan donné dans un autre plan, qui ferait avec celui-là un angle de trois minutes, dont la considération peut influer sur la justesse du tir et sur la chance d'atteindre le *tonneau*, dans les exercices où le canonnier doit apporter beaucoup de précision. La déviation horizontale sera un peu moindre et s'observera vers l'*est*, quand on tirera vers le *nord*; elle sera un peu plus grande et aura lieu vers l'ouest, quand on tirera vers le *midi*. Ajoutons encore, que dans le tir de la bombe à grande portée, par exemple à une distance du but d'environ 4000 mètres, ce qui suppose une vitesse initiale d'à peu près le tiers de 800 mètres, sous l'angle de 45°, et pour un projectile de 90 kilogrammes et d'un tiers de mètre de diamètre, les limites de la déviation, en tirant à l'*est* ou à l'*ouest*, seront à peu près 5 mètres et 10 mètres; en évaluant donc sa grandeur à 7 ou 8 mètres, on voit que dans les siéges, des édifices et des personnes ont pu être atteints par la chute d'une bombe, à cause du mouvement de la Terre, et d'autres ne pas l'être, pour la même cause.

» Ces nombres, et ceux qu'on a cités plus haut, se rapportent à une latitude moyenne; ils varieront avec celle du lieu de l'expérience: à l'équateur, et lorsque le tir a lieu dans son plan, la déviation horizontale s'évanouit, tandis que les accroissements de la durée du trajet et de la longueur de la portée atteignent leur *maximum*; dans les hautes latitudes, ce sont, au contraire, la déviation qui approche de son *maximum*, et ces accroissements qui diminuent : au pôle, la déviation horizontale, la même en ce point pour le tir dans tous les plans verticaux, surpasserait d'à peu près moitié celle qui a lieu dans notre région. Partout, les accroissements de la portée et du temps sont nuls, quand la vitesse initiale est dirigée dans le plan du méridien.

» Telle est l'analyse de la première partie de mon Mémoire. Je présenterai incessamment la seconde à l'Académie. Elle renfermera une application nouvelle des équations générales du double mouvement de rotation et de translation d'un corps solide, trouvées au milieu du siècle dernier par d'Alembert et Euler, mais dont, jusqu'à présent, on avait seulement fait usage en astronomie, pour résoudre les problèmes de la *précession des équinoxes* et de la *libration de la Lune*. Les artilleurs y trouveront l'explication précise de certaines irrégularités qu'ils ont observées dans les trajectoires des projectiles, et une comparaison du tir de la carabine rayée en hélice à celui du fusil ordinaire, qui ne sera pas, je l'espère, sans quelque utilité pour la pratique.