MÉMOIRE SUR LE MOUVEMENT

D'UN

CORPS QUI TOMBE D'UNE GRANDE HAUTEUR.

Bulletin de la Société philomathique, t. III; 1803.

Un corps qui tombe d'une hauteur considérable s'éloigne un peu de la verticale, en vertu du mouvement de rotation de la Terre; cet écart bien observé est donc propre à manifester ce mouvement. Quoique la rotation de la Terre soit maintenant établie avec toute la certitude que les Sciences physiques comportent, cependant une preuve directe de ce phénomène doit intéresser les géomètres et les astronomes. Ils ont fait, en conséquence, plusieurs expériences sur la chute des corps qui tombent d'une grande hauteur et ils ont en même temps donné la théorie de ce mouvement; mais leurs résultats présentent de grandes différences. Tous conviennent que le corps doit dévier vers l'est de la verticale, plusieurs pensent qu'il doit à la fois dévier vers l'équateur; d'autres, enfin, prétendent que cette dernière déviation n'aurait point lieu dans le vide, mais qu'elle doit être produite par la résistance de l'air. Au milieu de ces incertitudes, j'ai cru qu'une analyse exacte de ce problème serait utile à ceux qui voudront comparer sur ce point la théorie aux observations. C'est l'objet de ce Mémoire dans lequel je donne la véritable expression de la déviation du corps, en ayant égard à la résistance de l'air et je fais voir que, quelles que soient cette résistance et la figure de la Terre, il ne doit point y avoir de déviation vers l'équateur.

L'Observatoire national offre un puits d'environ 54^m de profondeur, depuis la plate-forme du sommet jusqu'au fond des caves, et qui est très propre à ce genre d'expériences, auquel il fut primitivement destiné. En choisissant le moment où l'atmosphère est calme et en fermant exactement l'Observatoire, on évitera l'influence du mouvement de l'air dont on se garantirait plus sûrement encore et très facilement, au moyen de quatre tambours adaptés verticalement aux quatre voûtes que le puits traverse. La déviation du corps vers l'est serait d'environ 6^{mm}, suivant la théorie. Cette quantité, quoique très petite, peut être reconnue par des expériences très précises et répétées plusieurs fois.

Nommons x, y, z les trois coordonnées rectangles du corps, l'origine de ces coordonnées étant au centre de la Terre et l'axe des x étant l'axe de rotation de cette planète. Soient

r le rayon mené de ce centre au sommet de la tour d'où le corps tombe;

θ l'angle que r forme avec l'axe de rotation;

ω l'angle que le plan passant par r et par l'axe de la Terre forme avec le plan passant par le même axe et par l'un des axes principaux de la Terre, situés dans le plan de son équateur;

nt le mouvement angulaire de rotation de la Terre.

En nommant X, Y, Z les coordonnées du sommet de la tour, on aura

$$\begin{aligned} X &= r\cos\theta, \\ Y &= r\sin\theta\cos(nt+\omega), \\ Z &= r\sin\theta\sin(nt+\omega); \end{aligned}$$

$nt+\omega$ étant l'angle que le plan passant par r et par l'axe de la Terre forme avec le plan des x et des y.

Supposons ensuite que, relativement au corps dans sa chute, r se change en $r-\alpha s$, θ dans $\theta+\alpha u$ et ω dans $\omega+\alpha v$; on aura

$$\begin{aligned} x &= (r-\alpha s)\cos(\theta+\alpha u), \\ y &= (r-\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\cos(nt+\omega+\alpha v), \\ z &= (r-\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\sin(nt+\omega+\alpha v). \end{aligned}$$

Nommons V la somme de toutes les molécules du sphéroïde terrestre, divisées par leurs distances au corps attiré. Les forces dont ce corps est animé par l'attraction de ces molécules sont, parallèlement aux axes des x, des y et des z, $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ et $\left(\frac{dV}{dz}\right)$, comme il résulte du n° 11 du second Livre de ma *Mécanique céleste* (¹). Pour avoir égard à la résistance de l'air, nous pouvons représenter par $\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)$ l'expression de cette résistance; car la vitesse du corps, relative à l'air considéré comme immobile, étant considérablement plus grande dans le sens de r que dans le sens perpendiculaire à r, ainsi qu'on le verra bientôt, l'expression de cette vitesse relative est à très peu près $\alpha\frac{ds}{dt}$. Si l'on fait, pour plus de simplicité, $r = 1$, la vitesse relative du corps dans le sens de θ est $\alpha\frac{du}{dt}$ et dans le sens de ω elle est égale à $\alpha\frac{dv}{dt}\sin\theta$; la résistance de l'air sera donc

$$\frac{\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}\alpha\frac{ds}{dt},$$

dans le sens de r;

$$\frac{-\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}\alpha\frac{du}{dt},$$

dans le sens de θ;

$$\frac{-\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}\alpha\frac{dv}{dt}\sin\theta,$$

dans le sens de ω.

Nommons K le facteur $\frac{\varphi\left(\alpha s, \alpha\frac{ds}{dt}\right)}{\alpha\frac{ds}{dt}}$; on aura, par le principe des vi-

(¹) *Œuvres de Laplace*, t. I.

tesses virtuelles,

$$\begin{aligned}
0 &= \delta x \frac{d^2x}{dt^2} + \delta y \frac{d^2y}{dt^2} + \delta z \frac{d^2z}{dt^2}, \\
&- \delta x\left(\frac{dV}{dx}\right) - \delta y\left(\frac{dV}{dy}\right) - \delta z\left(\frac{dV}{dz}\right), \\
&- K\,\delta r\,\alpha\frac{ds}{dt} + K\,\delta\theta\,\alpha\frac{du}{dt} + K\,\delta\omega\sin^2\theta\,\alpha\frac{dv}{dt},
\end{aligned}$$

la caractéristique différentielle δ se rapportant aux coordonnées r, θ et ω, dont x, y, z sont fonctions. En substituant pour x, y, z, leurs valeurs précédentes, on a, en négligeant les termes de l'ordre α^2,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
0 = {} & \delta r\left(-\alpha\frac{d^2s}{dt^2} - 2\alpha n r\frac{dv}{dt}\sin^2\theta - \alpha K\frac{ds}{dt}\right) \\
& + r^2\delta\theta\left(\alpha\frac{d^2u}{dt^2} - 2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta + \alpha K\frac{du}{dt}\right) \\
& + r^2\delta\omega\sin\theta\left(\alpha\frac{d^2v}{dt^2}\sin\theta + 2\alpha n\frac{du}{dt}\cos\theta - 2\alpha n\frac{ds}{dt}\frac{\sin\theta}{r} + \alpha K\frac{dv}{dt}\sin\theta\right) \\
& - \delta V - \frac{n^2}{2}\delta[(r-\alpha s)^2\sin^2(\theta+\alpha u)] + \ldots
\end{aligned}\right.$$

Par la nature de l'équilibre de la couche d'air dans laquelle le corps se trouve, on a

$$(2)\qquad 0 = \delta V + \frac{n^2}{2}\delta[(r-\alpha s)^2\sin^2(\theta+\alpha u)]\ldots\ \text{[1]},$$

pourvu que la valeur de δr soit assujettie à la surface de niveau de la couche. Soit, à cette surface,

$$r = a + y,$$

y étant une fonction de θ, de ω et de a, a étant constant pour la même couche; l'équation (2) donne ainsi

$$0 = \left(\frac{dQ}{dr}\right)\left[\left(\frac{dy}{d\theta}\right)\delta\theta + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)\delta\omega\right] + \left(\frac{dQ}{d\theta}\right)\delta\theta + \left(\frac{dQ}{d\omega}\right)\delta\omega,$$

Q étant supposé égal à $V + \frac{n^2}{2}[(r-\alpha s)^2\sin^2(\theta+\alpha u)]$ et en retran-

[1] *Œuvres de Laplace*, t. I, p. 110.

chant cette équation de l'équation (1), on aura

$$
\begin{aligned}
0 = \delta r\left(-\alpha\frac{d^2 s}{dt^2} - 2\alpha n r\frac{dv}{dt}\sin^2\theta - \alpha K\frac{ds}{dt}\right)& \\
+ r^2\delta\theta\left(\alpha\frac{d^2 u}{dt^2} - 2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta + \alpha K\frac{du}{dt}\right)& \\
+ r^2\delta\omega\sin\theta\left(\alpha\frac{d^2 v}{dt^2}\sin\theta + 2\alpha n\frac{du}{dt}\cos\theta - 2\alpha n\frac{ds}{dt}\frac{\sin\theta}{r} + \alpha K\frac{dv}{dt}\sin\theta\right)& \\
-\left(\frac{dQ}{dr}\right)\left[\delta r - \left(\frac{dy}{d\theta}\right)\delta\theta - \left(\frac{dy}{d\omega}\right)\delta\omega\right].&
\end{aligned}
$$

Si l'on égale à zéro les coefficients des trois variations δr, $\delta\theta$ et $\delta\omega$, et si l'on observe que $-\left(\frac{dQ}{dr}\right)$ représente la pesanteur que nous désignerons par g [1], on aura, en prenant pour l'unité le rayon r, ce qu'on peut faire ici sans erreur sensible, les trois équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin^2\theta + \alpha K\frac{ds}{dt} - g,\\
0 &= \alpha\frac{d^2 u}{dt^2} - 2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta + \alpha K\frac{du}{dt} - g\left(\frac{dy}{d\theta}\right),\\
0 &= \alpha\frac{d^2 v}{dt^2}\sin\theta + 2\alpha n\frac{du}{dt}\cos\theta - 2\alpha n\frac{ds}{dt}\sin\theta + \alpha K\frac{dv}{dt}\sin\theta - \frac{g}{\sin\theta}\left(\frac{dy}{d\omega}\right).
\end{aligned}
$$

Si l'on prend la seconde décimale, ou la cent-millième partie du jour moyen, pour unité de temps, n est le petit angle décrit dans une seconde par la rotation de la Terre. Cet angle est extrêmement petit; et comme αu et αv sont de très petites quantités par rapport à αs, on peut négliger, dans la première de ces trois équations, le terme $2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin^2\theta$; dans la deuxième, le terme $-2\alpha n\frac{dv}{dt}\sin\theta\cos\theta$ et, dans la troisième, le terme $2\alpha n\frac{du}{dt}\cos\theta$; ce qui réduit ces trois équations

[1] *Œuvres de Laplace*, t. II, p. 75.

aux suivantes

$$o = \alpha \frac{d^2 s}{dt^2} + \alpha K \frac{ds}{dt} - g,$$

$$o = \alpha \frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha K \frac{du}{dt} - g \frac{dy}{d\theta},$$

$$o = \alpha \frac{d^2 v}{dt^2} \sin\theta - 2\alpha n \frac{ds}{dt} \sin\theta + \alpha K \frac{dv}{dt} \sin\theta - \frac{g}{\sin\theta} \left(\frac{dy}{d\omega}\right),$$

K étant une fonction de αs et de $\alpha \frac{ds}{dt}$, la première de ces équations donne αs en fonction du temps t. Si l'on fait $\alpha u = \alpha s \left(\frac{dy}{d\theta}\right)$, on satisfera à la deuxième de ces équations; parce que g et $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$ peuvent être supposés constants pendant la durée du mouvement, vu la petitesse de la hauteur d'où le corps tombe, relativement au rayon terrestre. Cette manière de satisfaire à la seconde équation est la seule qui convienne à la question présente, dans laquelle u, $\frac{du}{dt}$ sont nuls ainsi que s et $\frac{ds}{dt}$ à l'origine du mouvement. Maintenant, si l'on imagine un fil à plomb de la longueur αs, suspendu au point d'où le corps tombe, il s'écartera, au midi du rayon r, de la quantité $\alpha s \left(\frac{dy}{d\theta}\right)$ et, par conséquent, de la quantité αu; le corps en tombant est donc toujours sur les parallèles des points de la verticale qui sont à la même hauteur que lui, il n'éprouve ainsi aucune déviation vers le midi de cette ligne.

Pour intégrer la troisième équation, nous ferons

$$\alpha v \sin\theta = \frac{\alpha s}{\sin\theta} \left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \alpha v'$$

et nous aurons

$$o = \alpha \frac{d^2 v'}{dt^2} + \alpha K \frac{dv'}{dt} - 2\alpha n \frac{ds}{dt} \sin\theta.$$

Le corps s'écarte, à l'est du rayon r, de la quantité $\alpha v \sin\theta$ ou $\frac{\alpha s}{\sin\theta} \left(\frac{dy}{d\omega}\right) + \alpha v'$, mais le fil à plomb s'écarte, à l'est de ce rayon, de la quantité $\frac{\alpha s}{\sin\theta}\left(\frac{dy}{d\omega}\right)$; $\alpha v'$ est donc l'écart du corps à l'est de la verticale.

Supposons maintenant la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse, en sorte que $k = m\alpha\frac{ds}{dt}$, m étant un coefficient qui dépend de la figure du corps et de la densité de l'air, densité variable à raison de l'élévation du corps, mais qui peut être ici supposée constante sans erreur sensible. On aura

$$o = \alpha\frac{d^2 s}{dt^2} + \alpha^2 m\frac{ds^2}{dt^2} - g.$$

Pour intégrer cette équation, nous ferons

$$\alpha s = \frac{1}{m}\log s',$$

et nous aurons

$$o = \frac{d^2 s'}{dt^2} - mgs',$$

ce qui donne en intégrant

$$s' = Ae^{t\sqrt{mg}} + Be^{-t\sqrt{mg}},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité et A et B étant deux arbitraires. Pour les déterminer nous observerons que αs doit être nul lorsque $t = o$, ce qui donne alors

$$s' = 1$$

et, par conséquent,

$$A + B = 1;$$

de plus, $\alpha\frac{ds}{dt}$ doit être nul avec t et, par conséquent, aussi $\frac{ds'}{dt}$, ce qui donne

$$A - B = o.$$

On a donc

$$A = B = \frac{1}{2}$$

et, par conséquent,

$$\alpha s = \frac{1}{m}\log\left(\frac{1}{2}e^{t\sqrt{mg}} + \frac{1}{2}e^{-t\sqrt{mg}}\right),$$

et en réduisant en séries

$$\alpha s = \frac{gt^2}{2} - \frac{mg^2t^4}{12} + \frac{m^2g^3t^6}{45} - \ldots.$$

Pour déterminer $\alpha v'$, nous observerons que l'on a

$$\alpha \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m}\,\frac{ds'}{s'\,dt},$$

et qu'ainsi l'équation différentielle en $\alpha v'$ devient

$$0 = \alpha s' \frac{d^2v'}{dt^2} + \alpha \frac{ds'}{dt}\,\frac{dv'}{dt} - \frac{2n}{m}\,\frac{ds'}{dt}\sin\theta,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\alpha s' \frac{dv'}{dt} = \frac{2n}{m}\sin\theta\, s' + \mathrm{C},$$

C étant une constante arbitraire. Pour la déterminer, nous observerons que t étant nul, $\frac{dv'}{dt} = 0$ et qu'alors $s' = 1$, ce qui donne

$$\mathrm{C} = -\frac{2n}{m}\sin\theta,$$

$$\alpha\frac{dv'}{dt} = \frac{2n}{m}\left(1 - \frac{1}{s'}\right)\sin\theta = \frac{2n}{m}\left(1 - \frac{2}{e^{t\sqrt{mg}} + e^{-t\sqrt{mg}}}\right)\sin\theta.$$

En intégrant de manière que $\alpha v'$ soit nul avec t, on aura

$$\alpha v' = \frac{2n\sin\theta}{m}\,t - \frac{4n\sin\theta}{m\sqrt{mg}}\,\text{arc tang}\left(\frac{e^{\frac{t}{2}\sqrt{mg}} - e^{-\frac{t}{2}\sqrt{mg}}}{e^{\frac{t}{2}\sqrt{mg}} + e^{-\frac{t}{2}\sqrt{mg}}}\right),$$

et en réduisant en séries, on aura

$$\alpha v' = \frac{ngt^3\sin\theta}{3}\left(1 - \frac{mgt^2}{4} + \frac{61}{840}m^2g^2t^4 - \ldots\right).$$

On doit observer, dans ces expressions de αs et de $\alpha v'$, que t exprimant un nombre d'unités de temps, g est le double de l'espace que la pesanteur fait décrire dans la première unité de temps; nt est l'angle de rotation de la Terre pendant le nombre t d'unités et mg est un nombre dépendant de la résistance que l'air oppose au mouvement du corps.

Pour avoir le temps de la chute et l'écart vers l'est, en fonction de la hauteur d'où le corps est tombé, nommons h cette hauteur. On aura par ce qui précède

$$2e^{mh} = e^{t\sqrt{mg}} + e^{-t\sqrt{mg}},$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{1}{\sqrt{mg}} \log \frac{1}{2} \left(\sqrt{e^{mh}+1} + \sqrt{e^{mh}-1}\right)^2;$$

et ensuite

$$\alpha v' = \frac{2n}{m\sqrt{mg}} \left[\log \frac{1}{2}\left(\sqrt{e^{mh}+1} + \sqrt{e^{mh}-1}\right)^2 - 2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{e^{mh}-1}}{\sqrt{e^{mh}+1}}\right)\right] \sin\theta.$$

La hauteur h étant donnée, l'observation du temps t donnera la valeur de m et l'on en conclura $\alpha v'$ ou la déviation du corps vers l'est de la verticale. L'accord de ce résultat avec l'expérience manifestera le mouvement de rotation de la Terre. On pourra encore déterminer m par la figure et la densité du corps et par les expériences déjà faites sur la résistance de l'air.

Dans le vide ou, ce qui revient au même, dans le cas de m infiniment petit, on a

$$\alpha v' = \frac{2nh}{3} \sin\theta \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

θ est à fort peu près le complément de la latitude du lieu et, pour Paris, on peut supposer $\theta = 41°9'46''$, n est l'angle de rotation de la Terre pendant une unité de temps. Si l'on prend pour cette unité la cent-millième partie du jour, on aura

$$n = \frac{1\,296\,000}{99\,727},$$

parce que la durée de la rotation de la Terre est $0^{\text{jour}},99727$; on a ensuite à Paris

$$\frac{1}{2} g = 3^{\text{m}},66107.$$

En supposant donc $h = 54^{m}$, on trouve

$$\alpha v' = 5^{mm},7337 \text{ (1)}.$$

Additions du Rédacteur.

M. Guglielmini paraît être le premier qui ait éveillé sur ces objets l'attention des astronomes et des géomètres, par des expériences qu'il fit en 1791, et dont le C. Lalande a rendu compte dans le *Magasin encyclopédique*. En faisant tomber des corps d'une hauteur de 241 pieds, il trouva à l'est de la verticale une déviation de 8 lignes et une de 5 lignes vers le sud, et ces résultats furent conformes à la théorie qu'il s'était faite. Ces expériences ont été répétées l'année dernière à Hambourg, par M. Henzenberg, qui a communiqué ses résultats au C. Laplace.

M. Henzenberg, faisant tomber des corps d'une hauteur de 235 pieds de Paris, trouva que leur déviation à l'est était de 4 lignes, et il en observa aussi une au sud, mais de 1,5 ligne seulement. Cette dernière, que la théorie du C. Laplace n'explique pas, tient peut-être à des circonstances météorologiques.

La latitude de Hambourg étant de 53°36', on a

$$\theta = 36^{\circ}24',$$

puis

$$h = 235 = 76^{m},337.$$

Avec ces données on trouve, par la formule du C. Laplace, en ne tenant pas compte de la résistance de l'air, une déviation à l'est de

(1) Pour effectuer ce calcul, il faut observer que le numérateur de n est la circonférence du cercle, exprimée en secondes sexagésimales, et doit être converti en parties du rayon, en le divisant par l'arc égal au rayon, arc dont le logarithme est 5,3144251.

Le C. Laplace n'a pas tenu compte ici de la résistance de l'air, parce que son influence sur les balles de plomb d'un petit diamètre, avec lesquelles on fait les expériences, est très petite. (*Note du R.*)

$8^{lom},79$ ou environ 3,9 lignes du pied de Paris, résultat qui s'accorde à $\frac{1}{10}$ de ligne avec l'observation de M. Henzenberg.

M. Guglielmini a écrit au C. Lalande, en 1797, qu'il avait reconnu qu'il ne devait point y avoir de déviation au sud, et il a fait, en conséquence, de nouvelles expériences, mais dont les résultats ne nous sont pas parvenus. L. C.