RÉSUMÉ ANALYTIQUE

DE LA

THÉORIE DES MARÉES

TELLE QU'ELLE EST ÉTABLIE

DANS LA

MÉCANIQUE CÉLESTE DE LAPLACE

Parmi toutes les questions qui sont traitées dans la célèbre *Mécanique céleste* de Laplace, celle qui contient l'analyse la plus délicate est, sans contredit, la *Théorie des marées.*

Peu de gens, en France, lisent attentivement, la plume à la main, la *Mécanique céleste*, et, parmi ceux qui la lisent, il en est très peu qui osent aborder sérieusement cette théorie des marées dont la lecture, peut-être plus difficile que celle des autres questions, n'intéresse guère que les marins ou ceux qui habitent les ports du littoral français.

Pendant plusieurs années, l'Académie des Sciences a mis au concours la question suivante : « *Perfectionner en quelques points essentiels la théorie des marées.* »

Personne ne s'étant présenté pour entrer en lice, la question a été retirée.

Comme, cependant, cette théorie est une des plus saisissantes applications du principe d'*attraction universelle,* découvert par Newton qui, le premier, a indiqué la cause réelle des marées et en a donné une théorie, premier jalon posé pour traiter cette question, il semble naturel de faire tous ses efforts pour compléter et perfectionner la théorie analytique dont LAPLACE, à la suite des travaux de NEWTON, de Daniel BERNOUILLI, d'EULER, de MAC-LAURIN et enfin de d'ALEMBERT, a donné un savant exposé dans la *Mécanique céleste.*

Il m'a donc paru utile, pour appeler sur cette question l'attention de quelques-uns de nos savants officiers de marine ou de nos professeurs d'hydrographie, de donner un résumé analytique des travaux de LAPLACE sur les marées, en indiquant bien l'enchaînement de toutes les parties de son analyse et en montrant même les points qui, selon nous, peuvent paraître un peu hasardés.

En faisant ce travail et en le publiant, je m'efforce de continuer cette vulgarisation scientifique et astronomique, pour laquelle j'ai déjà publié la traduction française du célèbre ouvrage de GAUSS sur *le Mouvement des planètes;* les *Passages de Vénus sur le disque solaire;* les *Méthodes* de HANSEN et de WOOLHOUSE *sur la prédiction des éclipses; la méthode suivie par* LE VERRIER *pour la découverte de la planète Neptune*, etc., etc.

Paris, 26 décembre 1884.

Dans sa *Théorie des marées*, l'illustre LAPLACE s'est proposé de déterminer une équation permettant de résoudre le problème suivant :

Trouver quelle doit être, à un moment donné, la hauteur de l'eau en un point donné du globe et, subsidiairement, quelles doivent être, dans ce lieu, les heures des plus HAUTES *mers, l'élévation maximum des eaux, ainsi que les heures des plus* BASSES *mers et l'élévation minimum des eaux.*

Toute sa théorie reposant sur les équations qu'il a données dans son Livre 1er, Chapitre IV et Chapitre VIII, relativement à l'*équilibre* et au *mouvement* des fluides, nous croyons nécessaire, en raison de ses notations, de rappeler, succinctement, la manière dont il a traité ces deux questions.

Après avoir rapporté la position des points du liquide à trois axes de coordonnées rectangulaires X, Y et Z, il considère le liquide comme composé de parallélipipèdes rectangles *infiniment petits*, dont les trois dimensions dx, dy et dz sont respectivement parallèles aux trois axes.

Il appelle p la moyenne des pressions qu'éprouve l'unité de surface sur la face parallèle au plan des X Y du parallélipipède élémentaire passant par le sommet a, le plus voisin de l'origine des coordonnées, et dont les coordonnées sont x, y et z.

Il admet que p est aussi la moyenne des pressions qu'éprouvent, sur l'unité de surface, les deux faces passant aussi par le sommet a et contiguës à la première.

Cette pression moyenne p est supposée, par l'auteur, une fonction de la situation du petit parallélipipède considéré, c'est-à-dire des coordonnées x, y et z du sommet a.

Laplace fait voir qu'en vertu du *principe d'égalité de pression* et de la différence des coordonnées de ses sommets, le petit parallélipipède est soumis, suivant les trois axes de coordonnées, aux pressions

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) dx, \left(\frac{dp}{dy}\right) dy, \left(\frac{dp}{dz}\right) dz,$$

$\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, $\left(\frac{dp}{dz}\right)$ étant les *dérivées partielles* de p, fonction de x, y et z, prises par rapport à ces variables.

Il nomme ensuite P, Q et R les trois composantes, suivant les trois axes de coordonnées, de la *force accélératrice* qui sollicite le parallélipipède élémentaire, dont il désigne par ρ la *densité*. Les forces P, Q et R sont supposées tendre à *augmenter* les coordonnées; et ρ est une fonction de x, y et z, ainsi que les forces P, Q et R.

En s'appuyant sur le principe des *vitesses virtuelles*, Laplace établit alors l'équation

$$(1) \qquad \delta p = \rho\,(P\delta x + Q\delta y + R\delta z)$$

qui indique que la variation de la pression moyenne est égale au produit de la densité du parallélipipède par la somme des travaux élémentaires des forces P, Q et R.

En faisant remarquer que δp étant une variation *exacte*, le second membre de l'équation (1) doit en être une aussi, il arrive à la relation

$$(2) \quad 0 = P\left(\frac{dQ}{dz}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy}\right) - P\left(\frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

qui est celle qui doit exister entre les forces P, Q et R pour que l'*équilibre soit possible.*

Si le fluide est libre* à sa surface, dit LAPLACE, ou dans quelques parties de cette surface, la valeur de p sera nulle, et par suite $\delta p = 0$. Sans que l'on suppose p nulle, on aura $\delta p = 0$ si l'on suppose la pression *constante*. En nous plaçant dans cette hypothèse, on aura, d'après l'équation (1),

$$\mathrm{P}\delta x + \mathrm{Q}\delta y + \mathrm{R}\delta z = 0,$$

c'est-à-dire que les variations δx, δy et δz seront assujetties à appartenir à cette surface.

LAPLACE fait ensuite voir que lorsque les forces P, Q, R sont le résultat de forces *attractives*, la variation $\mathrm{P}\delta x + \mathrm{Q}\delta y + \mathrm{R}\delta z$ est une variation *exacte*.

En nommant $\delta\varphi$ cette variation, on aura, d'après l'équation (1), l'équation

$$\delta p = \rho\,\delta\varphi. \tag{3}$$

ce qui indique que la densité ρ est une fonction de p et de φ, c'est-à-dire qu'on a

$$\rho = f(\varphi, p)$$

et, par suite,

$$\delta p = f(\varphi, p)\,\delta\varphi.$$

Et comme, en intégrant cette dernière équation, on obtient φ en fonction de p, on pourra donc avoir ρ en fonction de p, et, réciproquement, p en fonction de ρ.

LAPLACE en conclut que la pression p est donc la même pour toutes les molécules de *même densité*. Ainsi, on doit avoir

$$\delta p = 0$$

pour les surfaces des couches de la masse liquide dans lesquelles ρ est constant.

* Nous ne savons pas ce que veut dire LAPLACE : *Si le fluide est libre !* On sait que tous les liquides ne peuvent se maintenir dans cet état que lorsqu'ils supportent une pression. Ainsi, ***dans le vide, les liquides se vaporisent instantanément.*** C'est la pression atmosphérique qui maintient les eaux de l'Océan à l'état liquide.

Pour ces surfaces, nommées *couches de niveau*, on a la relation

$$0 = P\delta x + Q\delta y + R\delta z.$$

De cette première analyse sur l'équilibre des fluides dont la surface *extérieure* est *libre* (disons dont la pression est constante) et qui recouvre un noyau solide fixe et de figure quelconque, LAPLACE conclut qu'il faut, et il suffit :

1° Que la variation

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z.$$

soit une variation exacte;

2° Que la résultante des forces qui agissent sur la surface extérieure soit *dirigée vers* cette surface et lui soit *perpendiculaire.*

L'illustre auteur de la *Mécanique céleste* détermine ensuite les équations relatives au *mouvement* d'une masse fluide.

En partant de l'équation générale de l'équilibre des fluides, et en s'appuyant sur le théorème de D'ALEMBERT, après avoir fait remarquer que, dans l'état de mouvement, les forces qui produiraient l'équilibre seraient

$$P - \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right);\ Q - \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right);\ R - \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

il arrive à l'équation

$$(1) \text{ ou } (F) \qquad \delta V - \frac{\delta p}{\rho} = \delta x\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \delta y\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \delta z\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

dans laquelle on a

$$\delta V = P\delta x + Q\delta y + R\delta z.$$

Les coordonnées x, y, z, d'un point liquide sont, dans le cas du mouvement, fonctions des coordonnées a, b, c, de ce point, *à l'origine du temps*, et aussi fonctions du *temps*.

En raison de cette considération et au moyen de l'équation (F), LAPLACE indique comment on peut arriver à une équation différentielle pouvant fournir trois équations *aux différentielles partielles* entre les coordonnées x, y, z, les coordonnées *primitives* a, b, c et le temps t.

Il cherche ensuite les relations à établir pour remplir les conditions de la *continuité du fluide*.

Il considère, à l'origine du temps, le petit parallélipipède *rectangle* dont les dimensions sont $\mathrm{d}a$, $\mathrm{d}b$ et $\mathrm{d}c$, et sa transformation en un parallélipipède *obliquangle* après le temps dt. Pour avoir le volume de ce petit parallélipipède obliquangle, il exprime d'abord sa hauteur qu'il trouve égale à

$$\left(\frac{dz}{dc}\right)\mathrm{d}c.$$

Par des considérations géométriques et analytiques, il trouve, pour dimensions $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}x$ de la base de ce parallélipipède

$$\mathrm{d}y = \frac{\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)}{\left(\frac{dz}{dc}\right)}.\,\mathrm{d}b$$

et

$$\mathrm{d}x \frac{6\,\mathrm{d}a}{\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)}$$

où l'on a

$$\begin{aligned} 6 = {} & \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) + \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dx}{da}\right) \\ & - \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) + \left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) - \left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{da}\right). \end{aligned}$$

Il en conclut que le volume du parallélipipède *obliquangle* est

$$6\,\mathrm{d}a,\ \mathrm{d}b,\ \mathrm{d}c$$

En appelant (ρ) la *densité* du parallélipipède *rectangle* à l'origine, et ρ la densité de ce parallélipipède devenu *obliquangle*, après le temps t, il arrive à l'équation suivante, relative à la *continuité du fluide :*

(5) ou (G) $$\rho\,(6) = (\rho).$$

Pour donner aux équations (F) et (G) une forme plus commode, LAPLACE introduit dans ces équations les vitesses

$$u = \left(\frac{dx}{dt}\right), \quad v = \left(\frac{dy}{dt}\right), \quad \mathrm{v} = \left(\frac{dz}{dt}\right)$$

de la molécule fluide, parallèlement aux axes des x, des y et des z.

Il obtient alors à la place de l'équation (F), l'équation suivante :

(6) ou (H)
$$\begin{aligned} \delta \mathrm{V} - \frac{\delta p}{\rho} = {} & \delta x \left[\left(\frac{du}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right) u + \left(\frac{du}{dy}\right) v + \left(\frac{du}{dz}\right) \mathrm{v}\right] \\ & + \delta y \left[\left(\frac{dv}{dt}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right) u + \left(\frac{dv}{dy}\right) v + \left(\frac{dv}{dz}\right) \mathrm{v}\right] \\ & + \delta z \left[\left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathrm{v}}{dx}\right) u + \left(\frac{d\mathrm{v}}{dy}\right) v + \left(\frac{d\mathrm{v}}{dz}\right) \mathrm{v}\right]. \end{aligned}$$

Et à la place de l'équation (G), il trouve

(7) ou (K)
$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \left(\frac{d.\rho u}{dx}\right) + \left(\frac{d.\rho v}{dy}\right) + \left(\frac{d.\rho \mathrm{v}}{dz}\right) = 0.$$

Laplace démontre ensuite que l'équation (H) est *susceptible d'intégration* dans un cas fort étendu, à savoir lorsque $u\delta x + v\delta y + \mathrm{v}\delta z$ est une variation exacte de x, y et z, c'est-à-dire lorsque l'on a

(8) ou (m)
$$u\delta x + v\delta y + \mathrm{v}\delta z = \delta\varphi.$$

Dans cette hypothèse, l'équation (H) devient

(9) ou (H')
$$\delta \mathrm{V} - \frac{\delta p}{\rho} = \delta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{1}{2} \delta \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]$$

qui, intégrée, relativement à δ, donne

$$\mathrm{V} - \int \frac{\delta p}{\rho} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]$$

plus une constante.

Il est à remarquer que la fonction φ, une fois connue, donnera les valeurs de u, v et v, puisque, d'après l'équation (8), on a évidemment :

$$u = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \quad v = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right), \quad \mathrm{v} = \left(\frac{d\varphi}{dz}\right).$$

En introduisant ces valeurs de u, v et v dans l'équation (K), on trouve que, pour les fluides homogènes, l'équation relative à la *continuité du fluide* est

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)=0.$$

Laplace démontre aussi que si la variation

$$u\delta x+v\delta y+\text{v}\delta z=\delta\varphi$$

est une *variation exacte* à un instant T, elle le sera à *tous les moments*.

Lorsque les mouvements du fluide sont très petits l'auteur fait remarquer que, dans l'équation (H), on peut négliger les produits de δx, δy et δz par u, v et v. Cette équation (H) se réduit alors à

$$(10) \text{ ou } (\text{H}'') \qquad \delta\text{V}-\frac{\delta p}{\rho}+\left(\frac{du}{dt}\right)\delta x+\left(\frac{dv}{dt}\right)\delta y+\left(\frac{d\text{v}}{dt}\right)\delta z=\delta\left(\frac{\delta\varphi}{dt}\right).$$

Donc, si p est une fonction de ρ, le second membre est une *variation exacte*, et l'on a, dit Laplace,

$$(11) \qquad \text{V}-\int\frac{\delta p}{\rho}=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

équation qui, pour les fluides *homogènes*, étant jointe à la relation

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)=0,$$

renferme *toute la théorie des ondulations très petites des fluides homogènes*.

Laplace étudie ensuite le mouvement d'une masse fluide *homogène* douée d'un mouvement de *rotation* autour de l'axe des x. Ainsi il suppose, par exemple, que les eaux de la mer n'ont d'autre mouvement que celui qui leur est commun avec celui de la Terre. Autrement dit, il n'a pas encore égard aux *attractions* développées par les *corps célestes*.

Il appelle n la vitesse angulaire de rotation, et il conclut que les vitesses linéaires de la molécule fluide, dont les coordonnées sont x, y et z, sont, parallèlement aux trois axes :

$$u=0, \qquad v=-nz, \qquad \text{v}=ny.$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (H), elle devient

$$\frac{\delta p}{\rho} = \delta V + n^2 [y \delta y + z \delta z],$$

équation dont les deux membres sont des *variations exactes*, et qui est donc *possible*.

L'équation (K), relative à la continuité du fluide, devient

$$0 = dt\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + v\,dt\left(\frac{d\rho}{dy}\right) + v\,dt\left(\frac{d\rho}{dz}\right),$$

équation qui est évidemment satisfaite si ρ est une constante, c'est-à-dire si le fluide est homogène.

Laplace fait alors remarquer que les équations qu'il vient de trouver se réduisent à celles de l'*équilibre* d'une *masse fluide*, données plus haut, sollicitée par les mêmes forces et *par la force centrifuge due au mouvement de rotation.*

Et il ajoute que si la surface de la masse fluide est *libre*, ou soumise à une pression *constante*, on a $\delta p = 0$, et, par suite, que l'on a

$$o = \delta V + n^2 (y \delta y + z \delta z). \tag{12}$$

Et comme la force centrifuge F, à la distance $\sqrt{y^2 + z^2}$ est, évidemment,

$$F = \frac{n^2 (y^2 + z^2)}{\sqrt{y^2 + z^2}} = n^2 \sqrt{y^2 + z^2}.$$

En la multipliant par l'élément de sa direction

$$\delta \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{y \delta y + z \delta z}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

on trouve

$$n^2 (y \delta y + z \delta z).$$

Donc, d'après l'équation (12), on peut conclure que la résultante de toutes les forces qui animent chaque molécule de la *surface extérieure* doit être *perpendiculaire* à cette surface, dirigée vers l'*intérieur* de la masse fluide *et égale et de sens opposé* à la force centrifuge.

Laplace fait remarquer que le cas qu'il vient d'examiner est un de ceux dans lesquels l'expression

$$u\delta x + v\delta y + \text{v}\delta z$$

n'est pas une *variation exacte*, puisqu'elle devient, par l'introduction de la rotation n considérée,

$$v\delta y + \text{v}\delta z = -n(z\delta y - y\delta z),$$

qui n'est pas une *variation exacte* *.

Sans préciser encore les *forces* qui peuvent troubler une masse fluide, Laplace détermine les relations analytiques qui concernent les *oscillations d'une masse fluide, recouvrant un sphéroïde doué d'un mouvement de rotation* n, *autour de l'axe des* x, *et supposé très peu dérangé de son état d'équilibre, par l'action de forces très petites.*

Il suppose fixe le centre du sphéroïde et le prend pour origine de trois axes de coordonnées rectangulaires, *fixes aussi*, et dont l'axe des x n'est autre chose que l'axe de rotation du sphéroïde.

Considérant alors une molécule fluide m, il définit sa position, à l'origine du temps, par sa distance $\mathrm{O}m = r$ au centre de gravité du sphéroïde supposé immobile et par les angles $m\mathrm{OX} = \theta$ et $\mathrm{POY} = \varpi$, P étant la projection de m sur le plan des ZY.

En supposant qu'après le temps t, sous l'influence des forces qui l'animent, la molécule se déplace,

le rayon r deviendra $r + \alpha s$,
l'angle θ $\quad\theta + \alpha u$,
et l'angle ϖ $\quad\varpi + nt + \alpha v$.

Si l'on appelle x, y, z les coordonnées de la molécule m, au bout du temps t elles seront

$$(13)\qquad \begin{aligned} x &= (r + \alpha s)\cos(\theta + \alpha u)\,; \\ y &= (r + \alpha s)\sin(\theta + \alpha u)\cos(nt + \varpi + \alpha v), \\ z &= (r + \alpha s)\sin(\theta + \alpha u)\sin(nt + \varpi + \alpha v). \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (F), du mouvement des fluides, on arrive, en négligeant le carré de α, à une équation désignée par (L) par Laplace, et qu'il écrit *spontanément*, *sans indiquer*

* $z\delta y + y\delta z = \delta zy$ est bien une variation exacte, mais $z\delta y - y\delta z$ ne l'est pas.

les calculs à l'aide desquels on passe de cette équation (F) *à l'équation* (L), *à l'aide des relations* (13).

Pour montrer combien la lecture de la *Théorie des marées* de la MÉCANIQUE CÉLESTE est ardue, la plume à la main, nous allons faire voir à l'aide de quels calculs, d'après nous, on peut passer de l'équation (F) à l'équation (L).

Si, dans les équations (13), on remplace

$$
\begin{aligned}
&\cos(\theta + \alpha u) \text{ par } (\cos\theta - \alpha u \sin\theta)\\
&\sin(\theta + \alpha u) \text{ par } (\sin\theta + \alpha u \cos\theta)\\
&\cos(nt + \varpi + \alpha v) \text{ par } [\cos(nt + \varpi) - \alpha v \sin(nt + \varpi)]\\
&\sin(nt + \varpi + \alpha v) \text{ par } [\sin(nt + \varpi) + \alpha v \cos(nt + \varpi)],
\end{aligned}
$$

Et si nous effectuons les multiplications de ces expressions par $(r + \alpha s)$, en négligeant les termes contenant α^2, nous trouvons :

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta + \alpha s\cos\theta - r\alpha u \sin\theta.\\
y &= r\sin\theta\cos(nt + \varpi) + r\cos\theta.\,\alpha u.\cos(nt + \varpi) + \alpha s.\sin\theta\cos(nt + \varpi)\\
&\qquad - r\sin\theta.\,\alpha v.\sin(nt + \varpi).\\
z &= r\sin\theta\sin(nt + \varpi) + r\cos\theta.\,\alpha u.\sin(nt + \varpi) + \alpha s.\sin\theta\sin(nt + \varpi)\\
&\qquad + r\sin\theta.\,\alpha v.\cos(nt + \varpi).
\end{aligned}
\right.
$$

Des formules (13) nous déduisons :

$$
\begin{aligned}
\delta x &= \delta r\cos(\theta + \alpha u) - (r + \alpha s)\,\delta\theta\sin(\theta + \alpha u).\\
\delta y &= \delta r\sin(\theta + \alpha u)\cos(nt + \varpi + \alpha v)\\
&\quad + (r + \alpha s)\cos(\theta + \alpha u)\cos(nt + \varpi + \alpha v)\,\delta\theta\\
&\quad - (r + \alpha s)\sin(\theta + \alpha u)\sin(nt + \varpi + \alpha v)\,\delta\varpi.\\
\delta z &= \delta r\sin(\theta + \alpha u)\sin(nt + \varpi + \alpha v)\\
&\quad + (r + \alpha s)\cos(\theta + \alpha u)\sin(nt + \varpi + \alpha v)\,\delta\theta\\
&\quad + (r + \alpha s)\sin(\theta + \alpha u)\cos(nt + \varpi + \alpha v)\,\delta\varpi.
\end{aligned}
$$

En développant les sinus et cosinus, et faisant $\cos\alpha u = \cos\alpha v = 1$, et $\sin\alpha u = \alpha u$, $\sin\alpha v = \alpha v$, on obtient, en effectuant les multiplications et en négligeant les termes en α^2,

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta x &= \delta r\cos\theta - \delta r.\,\alpha u.\sin\theta - r\sin\theta\,\delta\theta - r\alpha u\cos\theta\,\delta\theta - \alpha s\sin\theta\,\delta\theta.\\
\delta y &= \delta r\,[\sin\theta\cos(nt + \varpi) + \alpha u\cos\theta\cos(nt + \varpi) - \alpha v\sin\theta\sin(nt + \varpi)]\\
&\quad + \delta\theta\,[r\cos\theta\cos(nt + \varpi) - r\alpha u\sin\theta\cos(nt + \varpi) - r\alpha v\cos\theta\sin(nt + \varpi)\\
&\qquad + \alpha s\cos\theta\cos(nt + \varpi)]\\
&\quad + \delta\varpi\,[-r\sin\theta\sin(nt + \varpi) - r\alpha u\cos\theta\sin(nt + \varpi) - r\alpha v\sin\theta\cos(nt + \varpi\\
&\qquad - \alpha s\sin\theta\sin(nt + \varpi)].\\
\delta z &= \delta r\,[\sin\theta.\sin(nt + \varpi) + \alpha u\cos\theta\sin(nt + \varpi) + \alpha v\sin\theta\cos(nt + \varpi)]\\
&\quad + \delta\theta\,[r\cos\theta\sin(nt + \varpi) - r\alpha u\sin\theta\sin(nt + \varpi) + r.\alpha v.\sin\theta\sin(nt + \varpi)\\
&\qquad + \alpha s\cos\theta\sin(nt + \varpi)]\\
&\quad + \delta\varpi\,[r\sin\theta\cos(nt + \varpi) + \alpha u\cos\theta\cos(nt + \varpi) - r.\alpha v\sin\theta\sin(nt + \varpi)\\
&\qquad + \alpha s.\sin\theta\cos(nt + \varpi)].
\end{aligned}
\right.
$$

Pour avoir les seconds coefficients différentiels

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right), \quad \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right), \quad \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

nous allons différentier les équations (14), par rapport au temps t.

On trouve, pour premiers coefficients différentiels, en remarquant que s, u et v son seules fonctions du temps :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \alpha \cos\theta \left(\frac{ds}{dt}\right) - r\alpha \left(\frac{du}{dt}\right) \sin\theta.$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dt}\right) = &- nr \sin\theta \sin(nt+\varpi) + r\cos\theta.\alpha \left(\frac{du}{dt}\right) \cos(nt+\varpi) \\ &- n.r.\alpha u \cos\theta \sin(nt+\varpi) + \alpha \left(\frac{ds}{dt}\right) \sin\theta \cos(nt+\varpi) \\ &- n.\alpha s \sin\theta \sin(nt+\varpi) - r\sin\theta\alpha \left(\frac{dv}{dt}\right) \sin(nt+\varpi) \\ &- nr\sin\theta.\alpha v \cos(nt+\varpi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dt}\right) = &\, nr \sin\theta \cos(nt+\varpi) + r\cos\theta\alpha \left(\frac{du}{dt}\right) \sin(nt+\varpi) \\ &+ nr\cos\theta.\alpha u.\cos(nt+\varpi) + \alpha \left(\frac{ds}{dt}\right) \sin\theta \sin(nt+\varpi) \\ &+ n.\alpha s.\sin\theta\cos(nt+\varpi) + r\sin\theta\alpha.\left(\frac{dv}{dt}\right) \cos(nt+\varpi) \\ &- nr\sin\theta.\alpha v.\sin(nt+\varpi).\end{aligned}$$

Et ensuite, pour seconds coefficients différentiels

$$(16)\left\{\begin{aligned}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = &\, \alpha\cos\theta \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) - r\sin\theta\alpha \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right). \\ \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = &- n^2 r \sin\theta \cos(nt+\varpi) + r\cos\theta.\alpha \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) \cos(nt+\varpi) \\ &- 2rn\cos\theta.\alpha \left(\frac{du}{dt}\right) \sin(nt+\varpi) - n^2 r\cos\theta\,\alpha u \cos(nt+\varpi) \\ &+ \alpha \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) \sin\theta\cos(nt+\varpi) - 2n\alpha \left(\frac{ds}{dt}\right) \sin\theta \sin(nt+\varpi) \\ &- n^2 \alpha s.\sin\theta\cos(nt+\varpi) - r\sin\theta\alpha \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) \sin(nt+\varpi) \\ &- 2nr\alpha \left(\frac{dv}{dt}\right) \sin\theta\cos(nt+\varpi). \\ \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = &- n^2 r \sin\theta \sin(nt+\varpi) + r\cos\theta.\alpha \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) \sin(nt+\varpi) \\ &+ 2nr\cos\theta\alpha \left(\frac{du}{dt}\right) \cos(nt+\varpi) - n^2 r\cos\theta.\alpha u.\sin(nt+\varpi) \\ &+ \alpha \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) \sin\theta\sin(nt+\varpi) + 2n\alpha\sin\theta \left(\frac{ds}{dt}\right) \cos(nt+\varpi) \\ &- n^2\alpha s.\sin\theta\sin(nt+\varpi) + r\sin\theta.\alpha \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) \cos(nt+\varpi) \\ &- 2nr.\alpha\sin\theta.\left(\frac{dv}{dt}\right) \sin(nt+\varpi) - n^2 r.\alpha v.\sin\theta\cos(nt+\varpi).\end{aligned}\right.$$

Pour former les produits

$$\delta x \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right), \qquad \delta y \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right), \qquad \delta z \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right),$$

Nous allons, à l'aide des relations (15) et (16), former successivement les termes en $\delta\theta$, puis en $\delta\varpi$ et enfin en δr, en négligeant toujours les termes contenant α^2.

Pour former les termes en $\delta\theta$, ne contenant pas α^2, nous multiplions les termes de $\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)$ par $-r\,\delta\theta \sin\theta$, terme en $\delta\theta$ de δx, puis les termes de $\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)$ par

$$r \cos\theta . \delta\theta . \cos(nt + \varpi), \text{ d'abord,}$$

et ensuite, le premier terme *seulement* par les autres termes de δy en $\delta\theta$; et enfin, les termes de $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)$ par

$$r \cos\theta . \delta\theta . \sin(nt + \varpi), \text{ d'abord,}$$

et ensuite, le premier terme *seulement* par les autres termes de δz en $\delta\theta$!

Nous trouvons ainsi, succesivement, en mettant $\delta\theta$ en facteur commun, et en numérotant les différents termes, en vue de la réduction,

$$\begin{aligned}
&\delta\theta \Big[\overset{1}{-} r\alpha \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) \overset{2}{+} r^2 \alpha \sin^2\theta \left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right) \Big] \\
+\, &\delta\theta \Big[\overset{3}{-} n^2 r^2 \sin\theta \cos\theta \cos^2(nt+\varpi) \overset{4}{+} r^2 \cos^2\theta \cos^2(nt+\varpi)\, \alpha \left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right) \\
&\quad \overset{5}{-} 2nr^2 \cos^2\theta . \alpha \left(\frac{du}{dt}\right) \sin(nt+\varpi) \cos(nt+\varpi) \overset{6}{-} n^2 r^2 \cos^2\theta . \alpha u . \cos^2(nt+\varpi) \\
&\quad \overset{7}{+} \alpha r \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) \sin\theta \cos\theta \cos^2(nt+\varpi) \\
&\quad \overset{8}{-} 2nr\alpha \left(\frac{ds}{dt}\right) \sin\theta \cos\theta \sin(nt+\varpi) \cos(nt+\varpi) \overset{9}{-} n^2 r . \alpha s . \sin\theta \cos\theta \cos^2(nt+\varpi) \\
&\quad \overset{10}{-} r^2 \sin\theta \cos\theta\, \alpha \left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right) \cos(nt+\varpi) \sin(nt+\varpi) \\
&\quad \overset{11}{-} 2nr^2 \alpha \left(\frac{dv}{dt}\right) \sin\theta \cos\theta \cos^2(nt+\varpi) \overset{12}{+} n^2 r^2 \sin\theta \cos\theta\, \alpha v . \sin(nt+\varpi) \cos(nt+\varpi) \\
&\quad \overset{13}{+} n^2 r^2 \alpha u \sin^2\theta \cos^2(nt+\varpi) \overset{14}{+} n^2 r^2 \alpha v \sin\theta \cos\theta \sin(nt+\varpi) \cos(nt+\varpi) \\
&\quad \overset{15}{-} n^2 r . \alpha s . \sin\theta \cos\theta \cos^2(nt+\varpi) \Big] \\
+\, &\delta\theta \Big[\overset{16}{-} n^2 r^2 \sin\theta \cos\theta \sin^2(nt+\varpi) \overset{17}{+} r^2 \cos^2\theta\, \alpha \left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right) \sin^2(nt+\varpi) \\
&\quad \overset{18}{+} 2nr^2 \cos^2\theta\, \alpha \left(\frac{du}{dt}\right) \sin(nt+\varpi) \cos(nt+\varpi) \overset{19}{-} n^2 r^2 \cos^2\theta . \alpha u . \sin^2(nt+\varpi)
\end{aligned}$$

$$\overset{20}{+\alpha r.\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)\sin\theta\cos\theta\sin^2(nt+\varpi)}$$

$$\overset{21}{+2nr.\alpha.\sin\theta\cos\theta\left(\frac{ds}{dt}\right)\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)}$$

$$\overset{22}{-n^2 r.\alpha s\sin\theta\cos\theta\sin^2(nt+\varpi)}\overset{23}{+r^2\sin\theta\cos\theta.\alpha\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right)\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)}$$

$$\overset{24}{-2nr^2\alpha\sin\theta\cos\theta\left(\frac{dv}{dt}\right)\sin^2(nt+\varpi)}$$

$$\overset{25}{-n^2r^2.\alpha v.\sin\theta.\cos\theta\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)}\overset{26}{+n^2r^2\alpha u.\sin^2\theta.\sin^2(nt+\varpi)}$$

$$\overset{27}{-n^2r^2\alpha v\sin\theta\cos\theta\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)}\overset{28}{-n^2 r.\alpha s.\sin\theta\cos\theta.\sin^2(nt+\varpi)}\Bigg].$$

En faisant la réduction des termes semblables, on trouve :

Que les termes	2, 4 et 17	donnent	$r^2.\alpha\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$,
»	1, 7 et 20	»	0,
»	5 et 18	»	0,
»	8 et 21	»	0,
»	10 et 23	»	0,
»	11 et 24	»	$-2nr^2\alpha\sin\theta\cos\theta\left(\frac{dv}{dt}\right)$,
»	3 et 16	»	$-n^2r^2\sin\theta\cos\theta$,
»	6 et 19	»	$-n^2r^2.\alpha u.\cos^2\theta$,
»	9 et 22	»	$-n^2r.\alpha s.\sin\theta\cos\theta$,
»	12 et 25	»	0,
»	13 et 26	»	$n^2r^2.\alpha u\sin^2\theta$,
»	14 et 27	»	0,
»	15 et 28	»	$-n^2r.\alpha s.\sin\theta\cos\theta$.

Nous trouvons donc, pour les termes en $\delta\theta$, et en mettant à part les termes en n^2 :

$$(17)\left\{\begin{aligned}&\alpha r^2\,\delta\theta\left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)-2n\sin\theta\cos\theta\left(\frac{dv}{dt}\right)\right]\\&-n^2\,\delta\theta\,(r^2\sin\theta\cos\theta+r^2\alpha u\cos^2\theta+2r\alpha s\sin\theta\cos\theta-r^2.\alpha u.\sin^2\theta).\end{aligned}\right.$$

Pour former les termes $\delta\varpi$, ne contenant pas α^2, multiplions tous les termes de $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ par $-2\sin\theta.\delta\varpi.\sin(nt+\varpi)$, terme sans α, en $\delta\varpi$ de δy, le premier terme *seulement* par les autres termes, en $\delta\varpi$ de δy, tous les termes de $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ par $r\sin\theta.\delta\varpi\cos(nt+\varpi)$, terme sans α, en $\delta\varpi$ de δz, et enfin, le premier terme *seulement* par les autres termes en $\delta\varpi$ de δz. Nous trouvons ainsi, successivement :

$$
\begin{aligned}
\delta\varpi\Big[&\overset{1}{+}\, n^2 r^2 \sin^2\theta \sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{2}{-}\, r^2 \alpha \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\cos(nt+\varpi)\sin(nt+\varpi)\\
&\overset{3}{+}\, 2r^2 n \sin\theta\cos\theta.\,\alpha\left(\frac{du}{dt}\right)\sin^2(nt+\varpi)\\
&\overset{4}{+}\, n^2 r^2 \cos\theta \sin\theta.\,\alpha u.\cos(nt+\varpi)\sin(nt+\varpi)\\
&\overset{5}{-}\, \alpha r \sin^2\theta\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{6}{+}\, 2\alpha.n.r\left(\frac{ds}{dt}\right)\sin^2\theta.\sin^2(nt+\varpi)+\alpha s.n^2 r\sin^2\theta\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{8}{+}\, r^2\alpha\sin^2\theta\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)\sin^2(nt+\varpi)\overset{9}{+}2r^2n\sin^2\theta.\alpha.\left(\frac{dv}{dt}\right)\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{10}{-}\, n^2r^2\sin^2\theta.\,\alpha v.\sin^2(nt+\varpi)\overset{11}{+}n^2r^2.\,\alpha v.\sin^2\theta\cos^2(nt+\varpi)\\
&\overset{12}{-}\, n^2r^2.\,\alpha u\sin\theta.\cos\theta.\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{13}{+}\, n^2 r.\,\alpha s.\sin^2\theta.\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\Big]\\
+\,\delta\varpi\Big[&\overset{14}{-}\, n^2r^2\sin^2\theta\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{15}{+}\, r^2\alpha\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\sin((nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{16}{+}\, 2nr^2\sin\theta\cos\theta.\,\alpha\left(\frac{du}{dt}\right)\cos^2(nt+\varpi)\\
&\overset{17}{-}\, n^2r^2\sin\theta\cos\theta\,\alpha u.\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{18}{+}\, r\alpha\sin^2\theta\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{19}{+}\, 2n\alpha r\sin^2\theta\left(\frac{ds}{dt}\right)\cos^2(nt+\varpi)\overset{20}{-}n^2r.\,\alpha s\sin^2\theta.\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{21}{+}\, r^2\alpha\sin^2\theta\left(\frac{dv}{dt}\right)\cos^2(nt+\varpi)\overset{22}{-}2nr^2\alpha\sin^2\theta\left(\frac{dv}{dt}\right)\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{23}{-}\, n^2r^2\alpha v\sin^2\theta\cos^2(nt+\varpi)\overset{24}{+}n^2r^2.\,\alpha u\sin\theta\cos\theta\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\\
&\overset{25}{+}\, n^2r^2\alpha v.\sin^2\theta\sin^2(nt+\varpi)\overset{26}{-}n^2r\alpha\sin^2\theta\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)\Big].
\end{aligned}
$$

En faisant la réduction des termes semblables, on trouve :

Que les termes	1 et 14	donnent	0,
»	2 et 15	»	0,
»	3 et 16	»	$2nr^2\alpha \sin\theta\cos\theta \left(\frac{du}{dt}\right)$,
»	4 et 17	»	0,
»	5 et 18	»	0,
»	6 et 19	»	$2n\alpha r \sin^2\theta \left(\frac{ds}{dt}\right)$,
»	7 et 20	»	0,
»	8 et 21	»	$r^2\alpha \sin^2\theta \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)$,
»	9 et 22	»	0,
»	10 et 25	»	0,
»	11 et 23	»	0,
»	12 et 24	»	0,
»	13 et 26	»	0.

Nous trouvons donc, pour les termes en $\delta\varpi$:

$$\alpha r^2 \delta\varpi \left[\sin^2\theta \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n \sin\theta\cos\theta \left(\frac{du}{dt}\right) + \frac{2n\sin^2\theta}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)\right].$$

Pour former les termes en δr, ne contenant pas α^2, multiplions tous les termes de $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ par $\delta r.\cos\theta$, terme, en δr de δz ; les termes de $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ par $\delta r \sin\theta\cos(nt+\varpi)$, le premier terme, *seulement*, par les autres termes, en δr de δy ; les termes de $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ par $\delta r \sin\theta \sin(nt+\varpi)$, et le premier terme, *seulement*, par les autres termes, en δr de δz ; nous trouvons ainsi :

$$\begin{aligned}
&\delta r \left[\overset{1}{\alpha\cos^2\theta \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)} - \overset{2}{r\sin\theta\cos\theta.\alpha\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)}\right] \\
+\,&\delta r \left[-\overset{3}{n^2 r\sin^2\theta\cos^2(nt+\varpi)} + \overset{4}{r.\alpha\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\cos^2(nt+\varpi)}\right. \\
&\quad - \overset{5}{2nr\alpha\sin\theta\cos\theta\left(\frac{du}{dt}\right)\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)} \\
&\quad - \overset{6}{n^2r.\sin\theta\cos\theta.\alpha u\cos^2(nt+\varpi)} + \overset{7}{\alpha\sin^2\theta\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\cos^2(nt+\varpi)} \\
&\quad - \overset{8}{2n\alpha\sin^2\theta\left(\frac{ds}{dt}\right)\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)} - \overset{9}{n^2\alpha s.\sin^2\theta\cos^2(nt+\varpi)} \\
&\quad - \overset{10}{r.\alpha\sin^2\theta\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)} - \overset{11}{2nr\alpha\sin^2\theta\left(\frac{dv}{dt}\right)\cos^2(nt+\varpi)} \\
&\quad + \overset{12}{n^2r.\sin^2\theta.\alpha v\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)} - \overset{13}{n^2r.\alpha u\sin\theta\cos\theta\cos^2(nt+\varpi)} \\
&\quad \left. + \overset{14}{n^2r.\alpha v.\sin^2\theta\sin(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi)}\right]
\end{aligned}$$

$$+ \delta z \Big[\overset{15}{-} n^2 r \sin^2\theta \sin^2(nt+\varpi) + r \cos\theta \sin\theta . \alpha \overset{16}{\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right)} \sin^2(nt+\varpi)$$

$$+ 2 n r \sin\theta \cos\theta\, \alpha \left(\frac{du}{dt}\right) \overset{17}{\sin} (nt+\varpi) \cos(nt+\varpi)$$

$$\overset{18}{-} n^2 r \sin\theta \cos\theta .\, \alpha u \sin^2(nt+\varpi) + \alpha \sin^2\theta \overset{19}{\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)} \sin^2(nt+\varpi)$$

$$+ 2 n \alpha \left(\frac{ds}{dt}\right) \sin^2\theta \overset{20}{\sin}(nt+\varpi) \cos(nt+\varpi) - n^2 \alpha s .\, \overset{21}{\sin^2\theta} \sin^2(nt+\varpi)$$

$$+ r \sin^2\theta .\, \alpha \left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right) \overset{22}{\sin}(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi) - 2 n r\, \alpha \sin^2\theta \overset{23}{\left(\frac{dv}{dt}\right)} \sin^2(nt+\varpi)$$

$$- n^2 r\, \alpha v .\, \sin^2\theta \overset{24}{\sin}(nt+\varpi)\cos(nt+\varpi) - n^2 r\, \alpha u \sin\theta \overset{25}{\cos\theta} \sin^2(nt+\varpi)$$

$$- n^2 r\, \alpha v \sin^2\theta \overset{26}{\sin}(nt+\varpi) \cos(nt+\varpi).$$

En faisant la réduction des termes semblables on trouve :

Que les termes	1, 7 et 19	donnent	$\alpha \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)$,
»	2, 4 et 16	»	0,
»	3 et 15	»	$- n^2 r \sin^2\theta$,
»	5 et 17	»	0,
»	6, 18, 13 et 25	»	$- 2 n^2 r \sin\theta \cos\theta .\, \alpha u$,
»	8 et 20	»	0,
»	9 et 21	»	$- n^2 \alpha s .\, \sin^2\theta$,
»	10 et 22	»	0,
»	11 et 23	»	$- 2 n r\, \alpha \sin^2\theta \left(\frac{dv}{dt}\right)$,
»	12 et 24	»	0,
»	14 et 16	»	0.

Nous trouvons donc, pour les termes en δr, et en mettant à part les termes en n^2 :

$$(19) \begin{cases} \alpha \delta r \left[\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) - 2 n r \sin^2\theta \left(\frac{dv}{dt}\right) \right] \\ - n^2 \delta r \left[r \sin^2\theta + 2 r \alpha u \sin\theta \cos\theta + \alpha s .\, \sin^2\theta \right] \end{cases}$$

L'équation (F) devient donc, en faisant passer les termes en $\delta\theta$, $\delta\varpi$ et δr dans le pre mier membre, et les termes en n^2, δV et $\frac{\delta p}{\rho}$ dans le second membre :

$$\alpha r^2 \delta \theta \left[\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right) - 2n \sin\theta \cos\theta \left(\frac{dv}{dt}\right)\right]$$

$$+ \alpha r^2 \delta \varpi \left[\sin^2\theta \left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right) + 2n \sin\theta \cos\theta \left(\frac{du}{dt}\right) + \frac{2n \sin^2\theta}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)\right]$$

$$+ \alpha \delta r \left[\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) - 2nr \sin^2\theta \left(\frac{dv}{dt}\right)\right]$$

$$= n^2 \delta\theta \left[r^2 \sin\theta\cos\theta + r^2 \alpha u \cos^2\theta + 2r\alpha s \sin\theta\cos\theta - r^2 \alpha u \sin^2\theta\right]$$

$$+ n^2 \delta r \left[r \sin^2\theta + 2r.\, \alpha u \sin\theta\cos\theta + \alpha s \sin^2\theta\right] + \delta V - \frac{\delta p}{\rho}.$$

Les termes en n^2 du second membre, ne sont autre chose, ainsi que nous allons le faire voir, que

$$\frac{n^2}{2}\delta\left[(r + \alpha s)\sin(\theta + \alpha u)\right]^2.$$

On a en effet :

$$\frac{n^2}{2}\delta\left[(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\right]^2 = n^2 (r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u).\ \delta\left[(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\right]$$

$$= n^2 (r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\ \left[\delta r \sin(\theta+\alpha u) + (r+\alpha s)\cos(\theta+\alpha u)\,\delta\theta\right]$$

ou, en négligeant les termes en α^2

$$= n^2 (r+\alpha s)(\sin\theta + \alpha u.\cos\theta)\left[\delta r(\sin\theta + \alpha u.\cos\theta) + (r+\alpha s)(\cos\theta - \alpha u\sin\theta)\,\delta\theta\right]$$

$$= n^2 (r\sin\theta + \alpha s.\sin\theta + r.\,\alpha u\cos\theta)\left[\delta r\sin\theta + \delta r.\,\alpha u\cos\theta + r\cos\theta\,\delta\theta + \alpha s\cos\theta\,\delta\theta - r\,\alpha u\sin\theta\,\delta\theta\right]$$

$$= n^2 \left[r\,\delta r\sin^2\theta + r\,\delta r.\,\alpha u\cos\theta\sin\theta + r^2\sin\theta\cos\theta\,\delta\theta + \alpha s.\,r\sin\theta\cos\theta\,\delta\theta - r^2\alpha u\sin^2\theta\,\delta\theta + \alpha s.\sin^2\theta\,\delta r + r\,\delta r.\,\alpha u\cos\theta\sin\theta + r\,\alpha s\sin\theta\cos\theta\,\delta\theta + r^2\alpha u\cos^2\theta\,\delta\theta\right]$$

$$= n^2\left[\delta\theta\,(r^2\sin\theta\cos\theta + 2r\alpha s\sin\theta\cos\theta - r^2\alpha u\sin^2\theta + r^2\alpha u\cos^2\theta) + \delta r\,(r\sin^2\theta + 2r.\,\alpha u\sin\theta\cos\theta + \alpha s.\sin^2\theta)\right].$$

Ainsi, l'équation (F) devient, finalement, ainsi que l'a indiqué LAPLACE :

$$(20)\ \text{ou}\ (L)\ \begin{cases} \alpha r^2 \delta\theta \left[\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right) - 2n\sin\theta\cos\theta\left(\frac{dv}{dt}\right)\right] \\ + \alpha r^2 \delta\varpi \left[\sin^2\theta\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right) + 2n\sin\theta\cos\theta\left(\frac{du}{dt}\right) + \frac{2n\sin^2\theta}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)\right] \\ + \alpha\delta r\left[\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) - 2nr.\sin^2\theta\left(\frac{dv}{dt}\right)\right] \\ = \frac{n^2}{2}\delta\left[(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\right]^2 + \delta V - \frac{\delta p}{\rho}. \end{cases}$$

δr, $\delta\theta$ et $\delta\varpi$ sont les variations qu'éprouvent r, θ et ϖ, quand on passe d'un lieu à un autre, très voisin.

Cette équation différentielle établit la relation qui doit exister, *dans le cas de mouvement*, entre les dérivées du premier et du second ordre des mouvements très petits de la molécule aqueuse, mouvements qui sont :

αs, sur le rayon r,
αu, relativement à l'angle θ,
αv relativement à l'angle ϖ,

la quantité δV, c'est-à-dire la *somme* des travaux élémentaires des forces P, Q et R, la *variation* de la pression δp, la densité ρ du liquide, et enfin, les *constantes* r, θ, ϖ et n de la question.

Si l'on considère seulement, dit LAPLACE, les molécules situées à la surface de la masse fluide et qu'on néglige les variations de la pression atmosphérique, on aura, pour cette surface, $\delta p = o$.

Si maintenant on supposait, après le temps t, la masse fluide en équilibre, sous l'action de certaines forces, les molécules ne changeant plus de places relatives, on aurait

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)=\left(\frac{du}{dt}\right)=\left(\frac{dv}{dt}\right)=0.$$

L'équation (L) se réduirait donc alors, dans ce cas, à la relation

$$0=\frac{n^2}{2}\,\delta\,\left\{(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\right\}^2+(\delta V),$$

(δV) étant la valeur de δV qui convient à cet état particulier.

Si le fluide considéré est la mer, ajoute LAPLACE, il est clair qu'en ne considérant aucune action étrangère, (δV) serait le produit de la *pesanteur* par l'*élément* de sa direction.

En désignant par g la pesanteur, et par αy * l'élévation de la molécule aqueuse au-dessus de la surface d'équilibre, considérée comme le vrai niveau de la mer, il est clair que si l'on revient à l'état de mouvement, puisque r est devenu $(r+\alpha y)$, (dV) devra croître du travail virtuel

$$-\alpha g\,\delta y;$$

* Cet y n'a pas de rapport avec l'y considéré précédemment.

et que si l'on désigne par $\alpha\delta V'$ la partie de δV, relative aux nouvelles forces qui, dans l'état de mouvement, sollicitent la molécule, forces qui dépendent, dit LAPLACE, soit des changements qu'éprouvent, par cet état de mouvement, les *attractions du sphéroïde* et du fluide, soit des *attractions étrangères,* on aura, à la surface de la mer

$$(21) \qquad \delta V = (\delta V) - \alpha g \delta y + \alpha \delta V',$$

c'est-à-dire que, dans l'état de mouvement, le travail virtuel

$$\delta V = P\delta x + Q\delta y + R\delta z$$

se compose du travail virtuel de la molécule dans l'état d'équilibre, plus le travail virtuel dû à la pesanteur, et au changement de distance de la molécule au centre de la Terre déterminé par le mouvement; plus, enfin, le *travail virtuel* $\alpha\delta V'$ dû aux *actions étrangères.*

C'est ce dernier travail virtuel qui constitue, en dernier ressort, l'analyse de LAPLACE *sur la Théorie des Marées.*

Pour simplifier son équation (L), dans le cas du mouvement, LAPLACE considère seulement les molécules à la surface et suppose *constante* la pression atmosphérique, ce qui lui donne $\delta p = 0$; puis il fait remarquer que le rayon r étant, sur toute la Terre, à peu près constant, en raison de la forme presque sphérique du globe, on peut négliger, dans l'équation (L), le terme en δr, et en faisant aussi remarquer que l'augmentation qui se produit dans le terme

$$\frac{n^2}{2}\delta\left[(r+\alpha s)\sin(\theta+\alpha u)\right]^2$$

par suite du mouvement, c'est-à-dire quand r devient $r+\alpha y$ est

$$\alpha n^2 \delta y . r \sin^2\theta,$$

quantité négligeable, en présence de $-\alpha g\delta y$, puisque $\frac{n^2 r}{g} = \frac{1}{289}$ à l'équateur, il trouve, après avoir divisé tous les termes par α, que l'équation (L) peut s'écrire

$$(21) \text{ ou } (\mathrm{L}') \left\{ \begin{aligned} & r^2 \delta\theta \left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2ns.\sin\theta\cos\theta\left(\frac{dv}{dt}\right) \right] \\ & + r^2 \delta\varpi \left[\sin^2\theta \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n\sin\theta\cos\theta\left(\frac{du}{dt}\right) + 2n\sin^2\theta\left(\frac{ds}{dt}\right) \right] \\ & = -g\delta y + \delta V'. \end{aligned} \right.$$

Les variations δy et $\delta V'$ étant relatives aux deux variables θ et ϖ.

Laplace introduit ensuite, dans l'équation relative à la *continuité du fluide*, et en suivant un raisonnement analogue à celui que nous avons indiqué plus haut, les quantités r, θ, ϖ et leurs valeurs r', θ' et ϖ' après le temps t; et il trouve alors, en posant :

$$\begin{aligned} 6' = & \left(\frac{dr'}{dr}\right)\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)\left(\frac{d\varpi'}{d\varpi}\right) - \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\theta'}{dr}\right)\left(\frac{d\varpi'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dr'}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta'}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\varpi'}{dr}\right) \\ & - \left(\frac{dr'}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta'}{dr}\right)\left(\frac{d\varpi'}{d\varpi}\right) + \left(\frac{dr'}{dr}\right)\left(\frac{d\theta'}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\varpi'}{d\theta}\right) - \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right)\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)\left(\frac{d\varpi'}{dr}\right). \end{aligned}$$

que le *volume* de la molécule, *parallélipipède rectangle* à l'origine, est devenu

$$6' r'^2 \sin\theta \, dr.\, d\theta.\, d\varpi.$$

et alors, en nommant toujours (ρ), la densité *primitive* de la molécule, et ρ sa densité après le temps t, il trouve, pour équation relative à la *continuité* du fluide

$$\rho\, 6'\, r'^2 \sin\theta' = (\rho)\, r^2 \sin\theta$$

qu'il transforme encore, en faisant remarquer que comme l'on a

$$\begin{aligned} r' &= r + \alpha s \\ \theta' &= \theta + \alpha u \\ \varpi' &= \varpi + nt + \alpha v, \end{aligned}$$

on obtient, en négligeant les quantités de l'ordre α^2

$$6' = 1 + \alpha\left(\frac{ds}{dr}\right) + \alpha\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \alpha\left(\frac{dv}{d\varpi}\right),$$

et, si l'on suppose qu'après le temps la densité primitive (ρ) soit devenue $(\rho) + \alpha\rho'$, l'auteur trouve, dis-je, que l'on arrive finalement à l'équation

$$(22)\qquad 0 = r^2\left\{\rho' + (\rho)\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u\cos\theta}{\sin\theta}\right]\right\} + (\rho)\left(\frac{dr^2s}{dr}\right).$$

Dans l'application que LAPLACE veut faire des résultats précédents, aux oscillations de la mer, il s'attache d'abord à démontrer que s peut être *négligé*, vis-à-vis de u et de v, et qu'alors l'équation (L') du mouvement de la mer, *à sa surface*, peut s'écrire :

$$(23) \text{ ou } (M)\quad \begin{cases} r^2\delta\theta\left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n\sin\theta\cos\theta\left(\frac{dv}{dt}\right)\right] \\ + r^2\delta\varpi\left[\sin^2\theta\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n\sin\theta\cos\theta\left(\frac{du}{dt}\right)\right] = -g\delta y + \delta V'. \end{cases}$$

L'auteur démontre ensuite que, si l'on n'a égard qu'aux *variations* de θ et ϖ, l'équation (L) se change en l'équation (M), pour toutes les molécules de la masse fluide. Les valeurs de u et de v, dit-il, relatives à toutes les molécules de la mer situées sur le même rayon terrestre, sont donc déterminées par les mêmes équations différentielles. Ainsi, en supposant, comme il le fait dans la théorie du flux et du reflux de la mer, qu'à l'origine du mouvement les valeurs de u, $\left(\frac{du}{dt}\right)$, v, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ ont été *les mêmes pour toutes les molécules situées sur le même rayon*, ces molécules restent encore sur le même rayon durant les oscillations du fluide. Les valeurs de s, u et v peuvent donc être supposées les mêmes, à très peu près, sur la partie du rayon terrestre comprise *entre le solide que la mer recouvre et la surface de la mer*.

Si on suppose la masse de la mer homogène, comme l'admet LAPLACE*, on peut faire, dans l'équation (22), $\rho' = 0$; cette équation devient alors

$$0 = \left(\frac{d.\,r^2s}{dr}\right) + r^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u\cos\theta}{\sin\theta}\right].$$

En *intégrant* cette équation, depuis r jusqu'à $r+\gamma$, γ étant la profondeur de la mer, supposée *très petite*, et en remarquant, en outre, que

$$\frac{(r+\gamma)^3}{3} - \frac{r^3}{3}$$

* Ce qui n'est pas ce qui a lieu dans la nature, en raison des différentes *salures* et *températures* de la mer.

est *sensiblement égal* à γr^2, quand on néglige les puissances supérieures de γ, on a

$$(24) \qquad 0 = r^2 s - (r^2 s) + r^2 \gamma \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u \cos\theta}{\sin\theta} \right],$$

dans laquelle relation $(r^2 s)$ est la valeur de $r^2 s$ à la surface du sphéroïde recouvert par la mer.

En appelant ensuite (s) ce que devient s à la surface du sphéroïde, et toujours γ la profondeur de la mer au point considéré, Laplace démontre que

$$r^2 s - (r^2 s) = r^2 [s - (s)]$$

et que la profondeur de la mer, correspondante aux angles $\theta + \alpha u$, $nt + \varpi + \alpha v$, est

$$\gamma + \alpha [s - (s)].$$

Si l'on fixe l'origine des angles θ et $nt + \varpi$ à un point et à un méridien *fixes* sur la surface de la Terre, cette même profondeur, dit-il, sera, en considérant γ comme une fonction de θ et de $(nt + \varpi)$:

$$\gamma + \alpha u \left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right) + \alpha v \left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)$$

plus l'élévation αy de la molécule fluide de la surface de la mer, au-dessus de sa *surface de niveau.* Il en conclut que l'équation (24) peut s'écrire :

$$(25 \text{ ou (N)}) \qquad y = -\left(\frac{d.\gamma u}{d\theta}\right) - \left(\frac{d.\gamma v}{d\varpi}\right) - \frac{\gamma u \cos\theta}{\sin\theta}.$$

Mais il fait remarquer que, dans cette dernière équation, les angles θ et $nt + \varpi$ sont comptés relativement à un point et à un méridien *fixes* sur la Terre, et que, dans l'équation (23) ou (M), ces mêmes angles sont comptés relativement à l'axe des x et à un plan qui, passant par cet axe, aurait, autour de lui, un mouvement de rotation égal à n.

Or, dit Laplace, cet axe et ce plan ne sont pas fixes sur la surface de la Terre, parce que l'attraction et la pression du fluide qui recouvre le globe doivent altérer un peu leur position sur cette surface, ainsi que le mouvement de rotation du sphéroïde.

Mais il est aisé de voir, ajoute l'auteur, que ces altérations sont aux valeurs de αu et de αv dans le rapport de la masse de la mer à celle du sphéroïde terrestre. Ainsi, pour rapporter les angles θ et $nt+\varpi$ à un point et à un méridien *invariables* de la surface du sphéroïde, dans les deux équations (M) et (N), il suffirait d'altérer u et v de quantités de l'ordre $\frac{\gamma u}{r}$ et $\frac{\gamma v}{r}$, quantités que Laplace a cru pouvoir négliger. On peut donc, dit-il, supposer, dans ces équations, que αu et αv sont *les mouvements du fluide en latitude et en longitude.*

Enfin, dit l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*, on peut encore observer que le centre de gravité du sphéroïde étant supposé *immobile*, il faut appliquer, *en sens contraire*, aux molécules fluides, les forces dont ce centre de gravité est animé par la réaction de la mer. Mais le centre de gravité commun du sphéroïde et de la mer ne changeant point, en vertu de cette réaction, il est clair que le rapport de ces forces à celles dont les molécules sont animées, par l'action du sphéroïde, est *du même ordre* que le rapport de la masse fluide à celle du sphéroïde, et, par conséquent, de l'ordre $\frac{\gamma}{r}$; on peut *donc le négliger dans le calcul de* $\delta V'$.

Il ne s'agit plus maintenant, dit Laplace, après tous ces préambules analytiques, que de *connaître les forces qui agitent cette masse fluide* et d'*intégrer ensuite les équations différentielles précédentes.*

C'est à l'aide des équations (M) et (N) que Laplace établit ensuite sa *Théorie du flux et du reflux de la mer.*

Il considère une molécule dm, de la surface de l'enveloppe aqueuse du globe, et représente par γ la profondeur de la mer à ce point; en supposant que γ, très petit par rapport au demi-petit axe de la Terre (qu'il prend pour unité de longueur), est une *fonction de* θ *et de* ϖ.

θ est toujours le *complément de la latitude* de la molécule dm dans l'état d'équilibre qu'elle prendrait sans l'action du Soleil et de la Lune, et ϖ la *longitude* de cette molécule dans cet état, cette longitude étant comptée d'un *méridien fixe* sur la Terre.

Il appelle ensuite αy l'élévation de la molécule dm au-dessus de la surface d'équilibre dans l'état de mouvement et suppose que, par cet état de mouvement, θ se change en $\theta + \alpha u$ et ϖ en $\varpi + \alpha v$. Il nomme, enfin, nt le moyen mouvement de rotation de la Terre, dans le temps t, et g la pesanteur.

Partant des équations (M) et (N), il fait remarquer que les deux quantités δy et $\delta V'$ sont *uniquement relatives aux variables* θ *et* ϖ.

Il détermine alors la partie de $\alpha \delta V'$ relative à l'action d'un astre, de masse L, sur la molécule dm, et trouve que cette action est représentée par l'expression

$$(26) \text{ ou } (D) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{L}{\sqrt{r^2 - 2r\,[\cos\theta \sin v + \cos v \sin\theta \sin(nt + \varpi - \psi)] + 1}} \\ - \left[\dfrac{L}{r} + \dfrac{L}{r^2}\left[\cos\theta \sin v + \sin\theta \cos v \cos(nt + \varpi - \psi)\right]\right], \end{array} \right.$$

dans laquelle v est la déclinaison de l'astre et ψ son ascension droite.

Laplace développe cette expression, suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{r}$, ce qui n'oblige à développer que le premier terme

$$\frac{L}{\sqrt{r^2 - 2r\,[\cos\theta \sin v + \sin\theta \cos v \sin(nt + \varpi - \psi)] + 1}}$$

suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{r}$.

En appelant r' le dénominateur, il pose

$$V = \frac{L}{r'}$$

[il ne faut pas confondre ce V avec celui de δV de l'équation (L)].

Il appelle μ le $\cos\theta$ et, en se reportant au n° 23 du 3^me^ livre de la *Mécanique céleste*, Laplace démontre que, si l'on pose

$$V = \frac{\alpha Z^{(0)}}{r} + \frac{\alpha Z^{(1)}}{r^2} + \frac{\alpha Z^{(2)}}{r^3} + \frac{\alpha Z^{(3)}}{r^4} \cdots\cdots + \frac{\alpha Z^{(i)}}{r^{(i+1)}}$$

$Z^{(i)}$ sera une fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, du degré i et assujettie à l'équation aux différentielles partielles

$$0=\left\{\frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{d\,Z^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\}+\frac{\frac{d^2 Z^{(i)}}{d\varpi^2}}{1-\mu^2}+i(i+1)Z^{(i)}.$$

Nous allons faire voir comment se justifie cette équation différentielle à laquelle doit satisfaire $Z^{(i)}$.

Si nous posons

$$K=r^2-2r\,[\cos\theta\sin v+\sin\theta\cos v\cos(nt+\varpi-\psi)+1]$$

nous aurons

$$(\alpha)\qquad V=L\,K^{-\frac{1}{2}},$$

Nous allons faire voir que cette relation devra satisfaire à l'équation aux différentielles partielles

$$(\beta)\qquad 0=\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)+\frac{\left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right)}{\sin^2\theta}+r\cdot\left(\frac{d^2 r V}{dr^2}\right).$$

Nous avons, en effet :

$$r\left(\frac{d^2.\,rV}{dr^2}\right)=r^2\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)+2r\left(\frac{dV}{dr}\right).$$

Nous pouvons alors former, à l'aide de l'équation (α), les différentielles partielles :

$$\left(\frac{dV}{d\theta}\right),\ \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right),\ \left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right),\ \left(\frac{dV}{dr}\right),\ \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right),$$

Nous trouvons facilement :

$$\left(\frac{dV}{d\theta}\right)=-\frac{1}{2}K^{-\frac{3}{2}}L\left(\frac{dK}{d\theta}\right)$$

$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)=\frac{3}{4}K^{-\frac{5}{2}}L\left(\frac{dK}{d\theta}\right)^2-\frac{1}{2}K^{-\frac{3}{2}}L\left(\frac{d^2K}{d\theta^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right)=\frac{3}{4}K^{-\frac{5}{2}}L\left(\frac{dK}{d\varpi}\right)^2-\frac{1}{2}K^{-\frac{3}{2}}L\left(\frac{d^2K}{d\varpi^2}\right)$$

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)=-\frac{1}{2}K^{-\frac{3}{2}}L\left(\frac{dK}{dr}\right)$$

$$\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)=\frac{3}{4}K^{-\frac{5}{2}}L\left(\frac{dK}{dr}\right)^2-\frac{1}{2}K^{-\frac{3}{2}}L\left(\frac{d^2K}{dr^2}\right).$$

Nous aurons, d'après cela,

$$
(\gamma)\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\left(\frac{dV}{d\theta}\right)+\frac{\left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right)}{\sin^2\theta}+r\left(\frac{d^2r\,V}{dr^2}\right)\\
&=-\frac{1}{2}K^{-\frac{3}{2}}L\left[\left(\frac{d^2K}{d\theta^2}\right)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{dK}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d^2K}{d\varpi^2}\right)+r^2\left(\frac{d^2K}{dr^2}\right)+2r\left(\frac{dK}{dr}\right)\right]\\
&\quad+\frac{3}{4}K^{-\frac{5}{2}}L\left[\left(\frac{dK}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{dK}{d\varpi}\right)^2+r^2\left(\frac{dK}{dr}\right)^2\right].
\end{aligned}\right.
$$

Au moyen de la relation

$$K = r^2 - 2\,r\,(\cos\theta\sin\nu + \sin\theta\cos\nu\cos(nt+\varpi-\psi)) + 1,$$

nous trouvons les coefficients différentiels :

$$\left(\frac{dK}{d\theta}\right) = 2\,r\sin\theta\sin\nu - 2\,r\cos\theta\cos\nu\cos(nt+\varpi-\psi)$$

$$\left(\frac{d^2K}{d\theta^2}\right) = 2\,r\cos\theta\sin\nu + 2\,r\sin\theta\cos\nu\cos(nt+\varpi-\psi)$$

$$\left(\frac{dK}{d\varpi}\right) = 2\,r\sin\theta\cos\nu\sin(nt+\varpi-\psi)$$

$$\left(\frac{d^2K}{d\varpi^2}\right) = 2\,r\sin\theta\cos\nu\cos(nt+\varpi-\psi)$$

$$\left(\frac{dK}{dr}\right) = 2\,r - 2\cos\theta\sin\nu - 2\sin\theta\cos\nu\cos(nt+\varpi-\psi)$$

$$\frac{d^2K}{dr^2} = 2.$$

Le coefficient de $-\frac{1}{2}K^{-\frac{3}{2}}L$, dans l'expression ($\gamma$) devient alors,

$$
\begin{aligned}
&2\,r\cos\theta\sin\nu + 2\,r\sin\theta\cos\nu\cos(nt+\varpi-\psi)\\
&+2\,r\cos\theta\sin\nu - 2\,r\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\cos\nu\cos(nt+\varpi-\psi)\\
&+2\,r\frac{\cos\nu}{\sin\theta}\cos(nt+\varpi-\psi)\\
&+2\,r^2\\
&+4\,r^2 - 4\,r\cos\theta\sin\nu - 4\,r\sin\theta\cos\nu\cos(nt+\varpi-\psi).
\end{aligned}
$$

L'ensemble de tous ces termes se réduit à $6\,r^2$.

Le coefficient de $\frac{3}{4}K^{-\frac{5}{2}}L$, dans l'expression ($\gamma$), devient aussi :

$$
\begin{aligned}
&4\,r^2\sin^2\theta\sin^2\nu - 8\,r^2\sin\theta\cos\theta\sin\nu\cos\nu\cos(nt+\varpi-\psi)\\
&\quad+4\,r^2\cos^2\theta\cos^2\nu\cos^2(nt+\varpi-\psi)+4\,r^2\cos^2\nu\sin^2(nt+\varpi-\psi)
\end{aligned}
$$

$$+ 4r^4 - 8r^3 \cos\theta \sin v - 8r^3 \sin\theta \cos v \cos(nt + \varpi - \psi) + 4r^2 \cos^2\theta \sin^2 v$$
$$+ 8r^2 \cos\theta \sin\theta \cos v \sin v \cos(nt + \varpi - \psi) + 4r^2 \sin^2\theta \cos^2 v \cos^2(nt + \varpi - \psi).$$

L'ensemble de tous ces termes se réduit à

$$4r^2 [r^2 - 2r(\cos\theta \sin v + \sin\theta \cos v \cos(nt + \varpi - \psi) + 1]$$

c'est-à-dire $4r^2 K$.

Le second membre de l'expression (γ) devient donc

$$-\frac{1}{2} K^{-\frac{3}{2}} L . 6r^2 + \frac{3}{4} K^{-\frac{3}{2}} . L\, 4r^2 K$$

c'est-à-dire *zéro*.

Donc la fonction V satisfait à l'équation aux différentielles partielles,

$$0 = \left(\frac{d^2 V}{d\theta^2}\right) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \left(\frac{dV}{d\theta}\right) + \frac{\left(\frac{d^2 V}{d\varpi^2}\right)}{\sin^2\theta} + r\left(\frac{d^2 r V}{dr^2}\right).$$

Si l'on fait $\cos\theta = \mu$, et en ayant égard aux formules relatives au changement de variable indépendante, on a enfin,

$$0 = \left\{\frac{d(1-\mu^2).\left(\frac{dV}{d\mu}\right)}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2 V}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + r\left(\frac{d^2 . r V}{dr^2}\right).$$

Laplace cherche ensuite la forme des fonctions $Z^{(i)}$.

En posant

$$\delta = \cos\theta \sin v + \sin\theta \cos v \cos(nt + \varpi - \psi)$$

et $r = \frac{1}{r''}$, la relation

$$V = \frac{L}{\sqrt{r^2 - 2r(\cos\theta \sin v + \sin\theta \cos v \cos(nt + \varpi - \psi) + 1}}$$

peut s'écrire

$$V = \frac{L}{r''}(r''^2 - 2\delta r'' + 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on développe

$$(r''^2 - 2\delta r'' + 1)^{-\frac{1}{2}},$$

suivant les puissances croissantes de r'', V se trouvera développé suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{r}$. On peut alors remarquer que les différentes fonctions $Z^{(i)}$ ne sont *autre chose que les coefficients des puissances de r''* dans le développement de

$$(r''^2 - 2r''\delta + 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

En s'appuyant sur le *Théorème de* MAC-LAURIN, il trouve alors que l'on a

$$(27)\quad Z^{(i)} = \frac{1.3.5\,..\,(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\left[\delta^i - \frac{i(i-1)}{2(2i-1)}\delta^{i-2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.4\ldots(2i-1)(2i-3)}\delta^{i-4}\ldots\right.$$

d'où LAPLACE conclut que, puisque les termes δ^{i-2}, δ^{i-4}..... etc. disparaissent quand i est < 2 ou < 4..... etc., $Z^{(i)}$ est bien une fonction rationnelle et entière de δ.

De plus, comme δ peut s'écrire

$$\delta = \cos\theta \sin v + \sin\theta \sin v \cos(nt - \psi)\cos\varpi + \sin\theta \sin v \sin(nt - \varpi)\sin\varpi.$$

$Z^{(i)}$ est bien une fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$.

En tenant compte, maintenant, du développement que nous venons d'indiquer, pour la différence (26) ou (D), on voit que l'action de l'astre de masse (L), sur la molécule dm, est exprimée par une série de la forme

$$(28)\qquad \frac{\alpha Z^{(2)}}{r^3} + \frac{\alpha Z^{(3)}}{r^4} + \frac{\alpha Z^{(4)}}{r^5}\ldots\ldots$$

dont chaque terme satisfait bien aux conditions exprimées ci-dessus.

LAPLACE fait remarquer que $\alpha\delta V'$ contient encore, en dehors de l'action de l'astre L sur la molécule dm, *l'attraction, sur cette molécule*, de la couche aqueuse dont le rayon intérieur étant l'unité, le rayon extérieur est $1 + \alpha y$.

Ainsi qu'on l'a indiqué pour l'action de l'astre L sur dm, il faut, pour déterminer l'attraction de la couche, diviser chacune des molé-

* Pour la démonstration de ce développement on peut voir celle qui est donnée dans le « calcul différentiel » de l'illustre J. BERTRAND, page 295, paragraphe 288.

cules de cette couche par sa distance à la molécule dm, et *différentier* la somme de ces quantités relativement à θ et à ϖ. Quant à l'action de la couche sur le centre de gravité de la Terre, il est évident qu'elle doit être négligée.

Laplace aborde, ensuite, la détermination des oscillations que *doit produire, sur l'enveloppe aqueuse du globe, l'action d'un astre tel que le Soleil ou la Lune.*

Dans cette première analyse, il suppose la Terre sphérique, la rotation *nulle*, c'est-à-dire $n = 0$, et la profondeur de la mer égale à une constante l.

En faisant $\cos\theta = \mu$ et $\gamma = l$, dans l'équation (N), l'auteur obtient d'abord la relation

$$(29) \text{ ou } (N') \qquad \frac{y}{l} = \left[\frac{d\left(u\sqrt{1-\mu^2}\right)}{d\mu}\right] - \frac{dv}{d\varpi}.$$

Puis, en introduisant dans l'équation (M), $n = 0$ et $\gamma = l$, et enfin, en indiquant, dans les différentielles dy et dV', que y et V' sont fonctions de μ et de ϖ, il obtient les équations différentielles

$$\frac{d^2u}{dt^2} = g\left(\frac{dy}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} - \left(\frac{dV'}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{g\left(\frac{dy}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2} + \frac{\left(\frac{dV'}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2}$$

et alors de l'équation (N'), différentiée deux fois,

$$(30) \text{ ou } (M') \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + lg\left[\frac{d(1-\mu^2)\left(\frac{dy}{d\mu}\right)}{d\mu}\right] + \frac{lg\left(\frac{d^2y}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} \\ &\qquad - l\left\{\frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{dV'}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} - \frac{i\left(\frac{d^2V'}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2}\right.. \end{aligned}\right.$$

Avant de chercher les coefficients $\left(\frac{dV'}{d\mu}\right)$, $\left(\frac{d^2V'}{d\omega^2}\right)$, $\left(\frac{dy}{d\mu}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{d\varpi^2}\right)$ qui entrent dans cette équation (M'), Laplace détermine l'action attractive V sur la molécule dm, de la couche sphérique fluide dont le rayon intérieur est l'unité et dont le rayon extérieur est $1 + \alpha y$.

Rappelons, à cet égard, comment dans les nos 11, 13 et 14 du 3me Livre de la *Mécanique céleste*, LAPLACE développe la théorie des attractions des sphéroïdes *homogènes, très peu différents de la sphère*, et comment il en conclut celles des sphéroïdes *hétérogènes*, quelle que soit la loi de la variation de la figure et de la densité de leurs couches.

En appelant r la distance du point attiré à l'origine des coordonnées, supposée le centre de la Terre, θ l'angle que fait le rayon r avec l'axe des x, ϖ l'angle que le plan formé par le rayon r et par cet axe fait avec le plan des xy; a, b, c les coordonnées de la molécule *attirée* dm et x, y, z celles de la molécule *attirante* $d\mathrm{M}$, il trouve, d'abord, pour l'action attractive

$$\mathrm{V}=\int\frac{d\mathrm{M}}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}.$$

Désignant ensuite par R, θ' et ϖ' ce que sont r, θ et ϖ relativement à la molécule $d\mathrm{M}$ du sphéroïde, il change cette expression en

$$\mathrm{V}=\int\int\int\frac{\rho\,\mathrm{R}^2\,d\mathrm{R}.\,d\theta'.\,d\varpi'\sin\theta'}{\sqrt{r^2-2r\mathrm{R}\,(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi'-\varpi)+\mathrm{R}^2}}.$$

En posant $\cos\theta=\mu$, il trouve encore que V doit satisfaire à l'équation aux différentielles partielles

$$0=\left\{\frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\}+\frac{\left(\frac{d^2\mathrm{V}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2}+r\left(\frac{d^2.\,r.\,\mathrm{V}}{dr^2}\right).$$

En supposant V développé en série, suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{r}$, on aura

$$(31)\qquad \mathrm{V}=\frac{\mathrm{U}^{(0)}}{r}+\frac{\mathrm{U}^{(1)}}{r^2}+\frac{\mathrm{U}^{(2)}}{r^3}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{\mathrm{U}^{(i)}}{r^{(i+1)}}.$$

Et il trouve encore que, quel que soit i, on doit avoir, en remplaçant V par ce développement, dans l'équation aux différentielles partielles,

$$0 = \left\{ \frac{d\left[1-\mu^2\left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2U^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i(i+1)\,U^{(i)}$$

et, qu'en outre, $U^{(i)}$ est une fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$ qui dépend de la nature du sphéroïde[1].

En supposant que le sphéroïde diffère très peu d'une sphère de rayon a, dont le centre soit sur le rayon r, perpendiculaire à la surface du sphéroïde, l'origine de ce rayon étant supposée arbitraire, mais très près du centre de gravité du sphéroïde; en supposant, en outre, que le sphéroïde *touche* la sphère et que le point attiré soit *au point de contact* des deux surfaces, Laplace démontre que l'on a la relation

$$-a\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{2\pi a^2}{3} + \frac{1}{2}V$$

et aussi que dans l'expression (31)

[1] Le terme général de rV est, en effet, $\frac{U^{(i)}}{r^i}$;

en différentiant ce terme, une première fois, on a

$$\frac{d.rV}{dr} = \frac{U^{(i)}\,i.\,r^{i-1}}{r^{2i}};$$

en prenant la différentielle seconde, on trouve

$$\left(\frac{d^2.rV}{dr^2}\right) = \frac{-U^{(i)}\,i\,(i-1)\,r^{i-2+2i} + U^{(i)}\,i\,r^{i-1}\,2i.\,r^{2i-1}}{r^{4i}}$$

$$= \frac{i\,(i+1)\,U^{(1)}\,r^{3i-2}}{r^{4i}} = \frac{i\,(i+1)\,U^{(i)}}{r^{i+2}}$$

d'où

$$r.\left(\frac{d^2.rV}{dr^2}\right) = \frac{i\,(i+1)\,U^{(i)}}{r^{i+1}}.$$

Comme ce dénominateur r^{i+1} se trouve aussi en dénominateur dans les expressions contenant $\frac{dU^{(i)}}{d\mu}$ et $\frac{d^2U^{(i)}}{d\varpi^2}$, on peut le chasser, d'où la relation donnée.

1° $U^{(0)} = \dfrac{4\pi a^3}{3}$ plus une *très petite quantité* de l'ordre de α, et qu'il désigne par $U'^{(0)}$;

2° Que les quantités $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ . . . sont aussi *très petites* de l'ordre α.

En différentiant l'équation (31), par rapport à r il obtient

$$(32) \qquad -\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{U^{(0)}}{r} + \frac{2\,U^{(1)}}{r^3} + \ldots\ldots \frac{(i+1)\,U^{(i)}}{r^{i+2}}.$$

En substituant $a(1 + \alpha y)$ à la place de r dans les relations (31) et (32) il arrive à l'équation

$$(33) \qquad 4\,\alpha\,\pi\,a^2 y = \frac{U'^{(0)}}{a} + \frac{3\,U^{(1)}}{a^2} + \frac{5\,U^{(2)}}{a^3} + \frac{7\,U^{(3)}}{a^4} \ldots\ldots$$

qui fait bien voir que y est une fonction de la forme

$$(34) \qquad y = Y^0 + Y^{(1)} + Y^{(2)} \ldots\ldots + Y^{(i)}.$$

Les quantités $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$ . . . étant, ainsi que $U_i^{(i)}$ assujetties à l'équation aux différentielles partielles

$$0 = \left\{\frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\dfrac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\dfrac{d^2 Y^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i\,(i+1)\,Y^{(i)}.$$

A la suite de cette analyse, et en prenant pour unité de densité la densité de la mer, ρ étant la moyenne densité de la Terre entière, Laplace trouve que la valeur de $\alpha V'$, quand on tient compte de l'action de la Lune et du Soleil et de l'attraction de la couche sphérique dont le rayon intérieur est 1 et le rayon extérieur $1 + \alpha y$, peut s'écrire

$$V' = \frac{3\,g}{\rho}\,\frac{Y^{(i)}}{(2\,i+1)} + U'^{(i)}$$

et qu'on a aussi

$$y = Y^{(i)},$$

i prenant successivement les valeurs 1, 2, 3 . . . etc. L'auteur déduit de là, les coefficients différentiels

$$\left(\frac{d\,V'}{d\,\mu}\right),\ \left(\frac{d^2\,V'}{d\,\varpi^2}\right),\ \left(\frac{d\,y}{d\,\mu}\right),\ \left(\frac{d^2\,y}{d\,\varpi^2}\right)$$

qui, introduits dans l'équation (M'), et en ayant égard à l'équation aux différentielles partielles à laquelle les fonctions $Y^{(i)}$ et $U^{(i)}$ doivent satisfaire, donnent, enfin, en posant

$$\lambda_i^2 = \frac{i\,(i+1)\,lg}{(2\,i+1)\,\rho}\,[(2\,i+1)\,\rho - 3]$$

l'équation différentielle de y, relativement au temps

$$\frac{d^2\,Y^{(i)}}{d\,t^2} + \lambda_i^2\,Y^{(i)} = i\,(i+1)\,l\,U^{(i)}. \tag{35}$$

Si l'on suit la méthode de Cauchy pour intégrer cette équation on trouve

$$\begin{aligned} Y^{(i)} = {} & e^{\lambda_i t\sqrt{-1}}\left[\alpha_1 + \frac{i\,(i+1).\,l}{2\,\lambda_i\sqrt{-1}}\int e^{\lambda_i t\sqrt{-1}}\,U^{(i)}\,dt\right] \\ & + e^{-\lambda_i t\sqrt{-1}}\left[\alpha_2 - \frac{i\,(i+1)\,l}{2\,\lambda_i\sqrt{-1}}\int e^{-\lambda_i t\sqrt{-1}}\,U^{(i)}\,dt\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

α_1 et α_2 étant des constantes arbitraires.

Pour se débarrasser des imaginaires, Laplace a égard aux relations

$$e^{\lambda_i t\sqrt{-1}} = \cos\lambda_i\,t + \sin\lambda_i\,t\sqrt{-1}$$

$$e^{-\lambda_i t\sqrt{-1}} = \cos\lambda_i\,t - \sin\lambda_i\,t\sqrt{-1}.$$

et il détermine les constantes α_1 et α_2 de manière qu'elles satisfassent aux relations

$$\alpha_1 + \alpha_2 = l.\,M^{(i)}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{-1} = l\,N^{(i)},$$

$M^{(i)}$ et $N^{(i)}$ étant des fonctions rationnelles et entières de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$ et satisfaisant, en outre, aux équations aux différentielles partielles

$$0=\left\{\frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{dM^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\}+\frac{\left(\frac{d^2M^{(i)}}{d\mu^2}\right)}{1-\mu^2}+i(i+1)M^{(i)}$$

$$0=\left\{\frac{d\left[(1-\mu^2)\left(\frac{dN^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\}+\frac{\left(\frac{d^2N^{(i)}}{d\mu^2}\right)}{1-\mu^2}+i(i+1)N^{(i)},$$

il obtient alors pour l'intégrale de l'équation (35).

(37)
$$\begin{aligned}Y^{(i)}&=lM^{(i)}\sin\lambda_i t+lN^{(i)}\cos\lambda_i t\\&+\frac{i(i+1)l}{\lambda_i}\sin\lambda_i t.\int U^{(i)}\,dt\cos\lambda_i t\\&-\frac{i(i+1)l}{\lambda_i}\cos\lambda_i t.\int U^{(i)}\,dt.\sin\lambda_i t.\end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de y il suffit de faire dans cette dernière relation, successivement,

$$i=0,1,2,3.\dots.$$

et il obtient alors

(38)
$$\begin{aligned}y=&lM^{(0)}t+lN^{(0)}+lM^{(1)}\sin\lambda_1 t+lN^{(1)}\cos\lambda_1 t\\&+lM^{(2)}\sin\lambda_2 t+lN^{(2)}\cos\lambda_2 t\\&+lM^{(i)}\sin\lambda_i t+lN^{(i)}\cos\lambda_i t\\&+\text{etc.}\\&+\frac{2l}{\lambda_1}\sin\lambda_1 t\int U^{(1)}\,dt\cos\lambda_1 t\\&-\frac{2l}{\lambda_1}\cos\lambda_1 t\int U^{(1)}\,dt\sin\lambda_1 t\\&+\frac{6l}{\lambda_2}\sin\lambda_2 t\int U^{(2)}\,dt\cos\lambda_2 t\end{aligned}$$

$$-\frac{6\,l}{\lambda_2}\cos\lambda_2\,t\int \mathrm{U}^{(2)}\,dt\sin\lambda_2\,t$$

$$+\frac{i\,(i+1)}{\lambda_i}\,l\sin\lambda_i\,t\int \mathrm{U}^{(i)}\,dt\cos\lambda_i\,t$$

$$-\frac{i\,(i+1)}{\lambda_i}\,l\cos\lambda_i\,t\int \mathrm{U}^{(i)}\,dt\sin\lambda_i\,\mathrm{t}.$$

Les fonctions N $(^0)$, N $(^1)$, N $(^2)$ .... sont déterminées au moyen de la figure initiale du fluide, c'est-à-dire en supposant $t = o$, et les fonctions M $(^0)$ M $(^1)$, M $(^2)$ au moyen de la vitesse initiale de y.

En discutant l'équation (38), Laplace fait voir que, par suite de la constance de la masse fluide, les quantités M $(^0)$ et N $(^0)$ sont *nulles*, ce qui, *à priori*, doit être, car, dans le cas contraire, le terme l M $(^0)$ t de y irait sans cesse en croissant avec le temps.

La valeur de y, établie par l'équation (38), ne contenant plus que des termes en *sinus* et *cosinus*, relatifs au temps t, est donc *périodique*, si aucune des quantités λ_1^2, λ_2^2 n'est négative; car l'auteur fait voir que si le contraire arrivait, d'après l'équation (35) et son intégrale (36), λ_i devenant imaginaire, les *sinus* et les *cosinus de l'équation* (38) se changeraient en exponentielles; la valeur de y ne serait donc plus *périodique*.

L'auteur indique, en outre, que si l'on avait $\lambda_i^2 = o$, l'équation (35) se réduirait à

$$\frac{d^2\,\mathrm{Y}^{(i)}}{d\,t^2} = i\,(i+1)\,l.\,\mathrm{U}^{(i)}$$

qui, intégrée, donne

$$\mathrm{Y} =^{(i)} \int dt \int i\,(i+1)\,l\,\mathrm{U}^{(i)}\,dt + \mathrm{C}t + \mathrm{C}'$$

C et C' étant deux constantes.

Dans ce cas, l'équation (38) contenant le temps t *implicitement*, la valeur de y ne serait plus *périodique*, ce qui ne peut être!

Laplace en conclut que λ_i^2 ne peut être ni *nulle* ni *négative*, ce qui exige, d'après la relation donnant λ_i^2, que l'on ait

$$\rho > \frac{3}{2\,i+1}$$

et comme i est entier, positif, égal ou plus grand que l'unité, que l'on ait

$$\rho > 1.$$

c'est-à-dire, dit Laplace, que pour l'*équilibre des mers*, ou du moins, la *périodicité* des marées, il faut que la *densité du noyau surpasse celle du fluide*.

L'auteur fait encore voir que si cette condition n'est pas remplie, *la stabilité de l'équilibre* dépendra de l'ébranlement.

Il démontre, en effet, que si l'ébranlement primitif est tel que le *centre de gravité* du fluide coïncide avec celui du noyau qu'il recouvre, et n'ait aucun mouvement par rapport à lui, dans le premier instant, il suffit, pour l'*équilibre des mers*, que la densité du noyau soit seulement plus grande que les 3/5 de la densité du fluide.

Pour sa démonstration, Laplace fait d'abord voir que quand le sphéroïde fluide renferme un *noyau solide*, d'une figure quelconque, peu différente de la sphère, la partie fluide du sphéroïde doit toujours se disposer, dans l'état d'équilibre, de manière que la fonction Y^1 soit nulle à tous les instants.

Il s'ensuit, d'après l'équation (38) que la *périodicité* de y, dépendant du signe de λ_i^2, ainsi que nous l'avons dit, le *minimum* que l'on puisse donner à i, dans la relation (34) est 2, et par suite, la condition de *stabilité d'équilibre*

$$(2i+1)\rho - 3 > \qquad \text{donne} \qquad \rho > \frac{3}{5}.$$

Une fois la valeur de y déterminée par l'équation (38), on peut obtenir, ainsi que l'indique Laplace, les valeurs de u et de v.

En partant, en effet, de l'équation

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) = g\left(\frac{dy}{d\mu}\right)\sqrt{1-\mu^2} - \left(\frac{dV'}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}$$

donnée page (30),

Il fait voir que cette relation peut s'écrire

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) = -\Sigma\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{i(i+1)l}\left[\frac{d^2\left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)}{dt^2}\right]$$

qui, intégrée, donne

$$u = G + Ht - \Sigma \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{i(i+1)l} \left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right),$$

dans laquelle G et H sont des fonctions arbitraires de μ et de ϖ.

En considérant ensuite l'équation

$$\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right) = \frac{1}{1-\mu^2}\left[-g\left(\frac{dy}{d\varpi}\right) + \left(\frac{dV'}{d\varpi}\right)\right]$$

que nous avons donnée, même page (30), il arrive aussi à la valeur de v

$$v = K + Lt + \Sigma \frac{1}{i(i+1)l(1-\mu^2)} \left(\frac{dY^{(i)}}{d\varpi}\right)$$

K et L étant des fonctions de μ et de ϖ, dépendant des fonctions G et H, puisqu'il trouve, en substituant dans la relation (29),

$$y = l\left(\frac{du\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - l\left(\frac{dV}{d\varpi}\right)$$

les valeurs ci-dessus de u et de v, et en comparant cette valeur de y à celle donnée par l'équation (38), que les constantes G, H, K et L sont liées par les deux relations :

$$0 = \left(\frac{dG\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{dK}{d\varpi}\right)$$

$$0 = \left(\frac{dH\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{dL}{d\varpi}\right)$$

et il en conclut que si l'on avait

$$(39)\left\{\begin{aligned} u &= G + Ht \\ \text{et}\quad v &= K + Lt \end{aligned}\right.$$

la valeur de y serait nulle et, par suite, la surface du fluide resterait toujours sphérique.

En imaginant même, dit Laplace, que le fluide ait un très petit mouvement de rotation, de l'ordre α, autour de l'axe du sphéroïde, et en négligeant l'effet de la force centrifuge qui sera évidemment de l'ordre α^2, on aura $u = o$ et $v = q.\ t\sqrt{1 - \mu^2}$, q étant un coefficient indépendant de μ et de ϖ.

Si l'on conçoit le fluide tournant autour de tout autre axe, ses mouvements étant très petits, ce fluide, mû en vertu d'un nombre quelconque de mouvements semblables, conservera toujours, aux quantités près du second ordre, la figure sphérique. Les formules (39) comprennent tous ces mouvements.

Ces mouvements, dit LAPLACE, ne nuisent point à la stabilité de l'équilibre; d'ailleurs, ils doivent être anéantis par les frottements et les résistances de tout genre que le fluide éprouve.

Edmond DUBOIS,

Examinateur-hydrographe de la marine.

(A suivre.)