MÉCANIQUE. — *Note sur le mouvement du pendule simple en ayant égard à l'influence de la rotation diurne de la terre; par* **M. BINET.**

« L'Académie a entendu, avec beaucoup d'intérêt, la communication que lui a faite M. Arago d'une belle expérience exécutée par M. Foucault : son objet est de montrer qu'un pendule simple et libre, mis en oscillation dans un plan déterminé, ne conserve pas l'orientation de ce plan, et que, par l'effet de la rotation diurne du globe terrestre, l'azimut du plan oscillatoire s'accroît continuellement dans le sens du nord vers l'est, ou de l'est vers le sud, ou du sud vers l'ouest, ou de l'ouest vers le nord, c'est-à-dire en sens contraire de la rotation du globe.

» L'expérience de M. Foucault réalise ainsi un vœu que Laplace énonce dans ces termes : « Quoique la rotation de la terre soit maintenant établie » avec toute la certitude que les sciences physiques comportent, cependant » une preuve directe de ce phénomène doit intéresser les géomètres et » les astronomes. »

» Ce résultat inattendu, qui confirme en quelque sorte physiquement les théories de Galilée, a été dignement accueilli et apprécié par les éloges que M. Arago et M. Pouillet ont exprimés dans la dernière séance de l'Académie. Depuis quelques jours plusieurs de nos confrères en avaient connaissance; M. Foucault m'avait exposé une partie des inductions dynamiques et des considérations qui avaient formé sa conviction : de premières expériences avaient justifié ses conjectures et ses vues. En me consultant, l'auteur désirait savoir à quel point le résultat mécanique auquel il arrivait s'accordait avec les théories mathématiques et avec les déductions obtenues par les géomètres. Dans le chapitre V du quatrième volume de la *Mécanique céleste*, Laplace a considéré l'effet de la rotation diurne de la terre sur le mouvement des projectiles dans le vide; il a eu égard, en outre, à la résistance de l'air sur la chute des corps qui tombent d'une grande hauteur : toutefois, il ne s'est pas occupé du pendule à ce point de vue du mouvement du globe terrestre. Poisson a traité ce sujet, en 1837, dans le *Journal de l'École Polytechnique;* cependant ce n'était pas l'objet spécial de ce grand géomètre, et il ne s'en occupe qu'incidemment. Il trouve les oscillations indépendantes du mouvement diurne dans tous les azimuts, quand le pendule est assujetti à suivre une courbe donnée; à l'égard du pendule qui peut se mouvoir librement dans tous les sens, il dit que *la force perpendiculaire au plan des oscillations est trop petite pour écarter sensiblement le pendule de son plan et avoir une influence appréciable sur son mouvement.* Cette conclusion paraît contraire aux expériences de M. Foucault; mais le passage que je viens de citer permet un doute: Poisson ne rapporte pas le calcul de la force dont il parle, et d'ailleurs il n'est pas suffisant d'avoir reconnu qu'une force perturbatrice est *très-petite* pour conclure qu'elle ne produira qu'un effet insensible après un grand nombre d'oscillations.

» Cette question méritait d'être approfondie; voici les résulats fournis par une discussion attentive des formules du mouvement relatif, à laquelle je me suis appliqué. J'ai supposé que le pendule ne fait que de très-petites digressions voisines de sa position d'équilibre; quand elles sont planes, une combinaison fort simple et analogue à celle qui donne les équations des moments, montre que le plan oscillatoire tourne graduellement autour de la verticale du point de suspension, avec une vitesse angulaire constante; l'azimut du plan, mesuré du nord vers l'est, de l'est vers le sud, etc., s'accroît uniformément; la vitesse constante est exprimée par la rotation angulaire de la terre, multipliée par le sinus de la latitude γ du lieu de l'observation. Ce mouvement angulaire est donc $15'' \sin \gamma$, pour une seconde de temps sidéral, la rotation uniforme de la terre étant de 15 degrés en une heure sidérale. Cette expression de la vitesse azimutale étant obtenue, m'a porté à faire une remarque, fondée sur un théorème d'Euler, que Lagrange a développé dans sa Mécanique, et sur lequel la Théorie des couples, de M. Poinsot, a répandu beaucoup de clarté. Le théorème d'Euler, appliqué au cas actuel, autorise à regarder la vitesse de rotation de la terre comme la résultante de deux vitesses angulaires qui auraient lieu, l'une autour de la verticale du pendule, et l'autre autour de la méridienne dirigée vers le nord, parce que ces deux lignes et une parallèle à l'axe de la terre passant par la suspension, se trouvent dans un même plan. La composante de la vitesse angulaire, relative à l'axe vertical, a pour expression $n . \sin \gamma$, selon ce théorème, c'est-à-dire la rotation de la terre multipliée par le cosinus de l'angle que forme son axe avec la verticale. Cette vitesse angulaire composante est donc la mesure de celle que prend le plan azimutal oscillatoire et en sens contraire. A cette considération, l'on pourrait rattacher quelques inductions et considérations synthétiques pour établir le résultat de M. Foucault; néanmoins il m'a paru qu'une preuve complète et plus satisfaisante résulte des équations du mouvement relatif. Le théorème d'Euler pourrait servir à former les équations différentielles du mouvement; mais elles ne fournissent toutes les circonstances calculables du mouvement que par leur intégration plus ou moins avancée ou par des propositions qui en tiennent lieu. Toutefois, je dois dire qu'au moment où j'énonçai à

M. Foucault l'expression de la vitesse, il me montra une formule qui exprimait la même loi; ainsi il a su découvrir non-seulement le phénomène de la déviation du plan, mais aussi la mesure de sa vitesse angulaire autour de la verticale.

» Les oscillations planes du pendule simple sont un cas particulier des oscillations coniques considérées autrefois par Clairaut, et c'est le problème plus général que j'ai effectivement traité, mais en ayant égard à la rotation diurne de la terre. Quand on fait abstraction de ce dernier mouvement et que le pendule ne s'écarte que très-peu de la verticale, notre confrère M. Pouillet a remarqué, il y a longtemps, que la projection horizontale du point mobile décrit une orbite elliptique dont le centre répond à la verticale, et en se bornant au premier degré d'approximation, l'ellipse est invariable. En faisant intervenir le mouvement diurne de la terre, je trouve que, quel que soit le sens du mouvement du pendule dans son orbite sphérique, cette projection horizontale est encore une ellipse dont les deux axes sont constants; c'est le plan azimutal du grand axe de l'ellipse qui se déplace, dans un sens rétrograde, avec une vitesse dont la partie uniforme est $n \sin \gamma$, c'est-à-dire la rotation angulaire de la terre estimée parallèlement à l'horizon, ainsi que je l'ai expliqué ci-dessus. Tous ces résultats supposent que l'on néglige la résistance de l'air dont l'effet principal se manifeste sur l'amplitude et sur la durée des oscillations, que cette résistance finit par éteindre; mais cet effet est très-faible sur la déviation du plan : ce ne sera que dans une seconde approximation que j'essayerai d'y avoir égard, n'ayant pour objet dans cette Note que de montrer comment l'expérience importante de M. Foucault aurait pu être indiquée par les équations de la dynamique interprétées sans inadvertance, parce qu'elles ne sont autre chose que l'expression exacte des lois du mouvement de la matière. »

(L'étendue de la partie analytique de cette Note oblige l'auteur à la renvoyer au numéro prochain du *Compte rendu.*)

A l'occasion du Mémoire de M. Binet, **M. Liouville** expose de vive voix, avec détail, une méthode synthétique qui lui paraît rigoureuse aussi. Cette méthode est fondée sur l'examen successif de ce qui arriverait : 1° à un pendule oscillant au pôle; 2° à un pendule oscillant à l'équateur, soit dans le plan même de l'équateur, soit dans le plan du méridien, soit enfin dans un plan vertical quelconque. On passe de là au cas général d'un pendule oscillant à telle latitude qu'on voudra, par la considération dont parle M. Binet;

c'est-à-dire en décomposant la rotation de la terre autour de son axe en deux rotations autour de deux axes rectangulaires, dont l'un est la verticale du lieu de l'observateur. « L'idée est bien simple, dit M. Liouville; elle a dû se » présenter à tout le monde, après la communication de M. Foucault, qui » rendait tout facile; mais les développements que j'ai ajoutés constituent, » je crois, une démonstration mathématique qui se suffit à elle-même, et » qui donne tout ce que peut donner le calcul. »

Sans contester les principes mécaniques énoncés par M. Liouville, **M. Binet** croit pouvoir s'en référer à sa Note : il espère que les géomètres admettront que, dans l'état de cette question au moment de la première communication de M. Foucault, il était convenable de montrer que les équations du mouvement relatif se concilient avec la belle expérience, et comment elles auraient pu l'indiquer.

ANALYSE ALGÉBRIQUE. — *Sur les fonctions de variables imaginaires; par* **M. Augustin Cauchy**.

« La théorie des fonctions de variables imaginaires présente des questions délicates qu'il importait de résoudre, et qui ont souvent embarrassé les géomètres. Mais toute difficulté disparaîtra, si, en se laissant guider par l'analogie, on étend aux fonctions de variables imaginaires les définitions généralement adoptées pour les fonctions de variables réelles. On arrive ainsi à des conclusions, singulières au premier abord, et néanmoins très-légitimes, que j'indiquerai en peu de mots.

» Deux variables réelles sont dites *fonctions* l'une de l'autre, lorsqu'elles varient simultanément de telle sorte que la valeur de l'une détermine la valeur de l'autre. Si les deux variables sont censées représenter les abscisses de deux points assujettis à se mouvoir sur une même droite, la position de l'un des points mobiles déterminera la position de l'autre, et réciproquement.

» Ajoutons que le rapport différentiel de deux variables réelles est une quantité généralement déterminée, et qui néanmoins peut cesser de l'être pour certaines valeurs particulières des variables. Ainsi, par exemple, le rapport différentiel de y à x deviendra indéterminé pour $x = 0$, si l'on suppose

$$y = x \sin \frac{1}{x}.$$