

Un modèle pour le mélange d'un traceur par la turbulence

Antoine Venaille , Joel Sommeria

1^{er} juillet 2008

- Motivation
- Modèles
- Tests expérimentaux
- Conclusion
- Perspectives : mélange de fluides stratifiés de manière stable.

Motivation

- 1 Modèles pour paramétriser l'entrainement dans des courants de gravité
- 2 Plus simple : Modèle pour le mélange turbulent d'un fluide stratifié de manière stable.
- 3 Encore plus simple ! modéliser le mélange d'un traceur passif

But

Comment évolue la distribution de probabilité de mesurer une certaine concentration d'un colorant lorsque celui-ci est mélangé par un écoulement turbulent ?

On considère ici le cas d'un colorant à très faible diffusivité :

$$Sc = \frac{\nu}{D} \gg 1$$

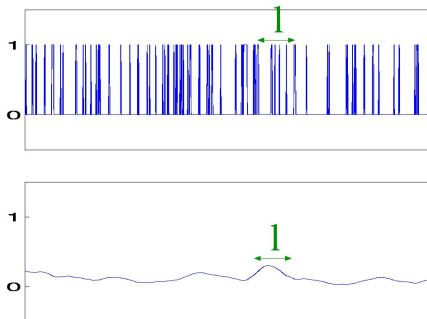
- Sel, Rhodamine $Sc \sim 1000$
- Température $Sc \sim 10$

Modèle : lien entre coarse graining et mélange



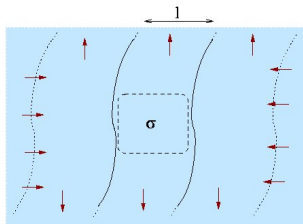
Un filtrage à des échelles / de plus en plus grandes homogénéise le champs de concentration. **Idée du modèle** : à / fixée, les mécanismes de cascade turbulente produisent le même effet.

Modèle : lien entre coarse graining et mélange

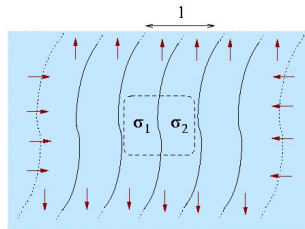


Un filtrage à des échelles l de plus en plus grandes homogénéise le champs de concentration. **Idée du modèle** : à l fixée, les mécanismes de cascade turbulente produisent le même effet.

Le mélange comme un processus de convolution



Probabilité $\rho_I(\sigma, t)d\sigma$ de mesurer
la concentration σ .



Probabilité $\rho_I(\sigma, t + t_2)d\sigma$ de
mesurer la concentration
 $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$

$$\rho_I(\sigma, t + t_2) = 2 \int \rho_I(t, \sigma_1) \rho_I(t, 2\sigma - \sigma_1) d\sigma_1$$

Evolution de la transformée de Laplace (TL)

$$\rho_I(\sigma, t + t_2) = 2 \int \rho_I(t, \sigma_1) \rho_I(t, 2\sigma - \sigma_1) d\sigma_1$$

On introduit la TL

$$\hat{\rho}_I(\kappa) = \int_0^{+\infty} \rho_I(\sigma) e^{-\kappa\sigma} d\sigma$$

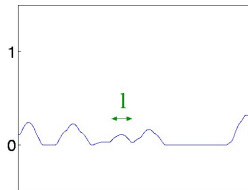
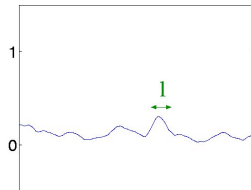
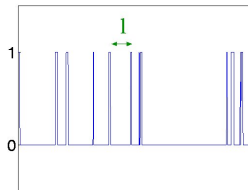
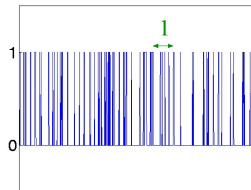
L'équation précédente devient

$$\hat{\rho}_I(\kappa, t + t_2) = [\hat{\rho}_I(\kappa/2, t)]^2$$

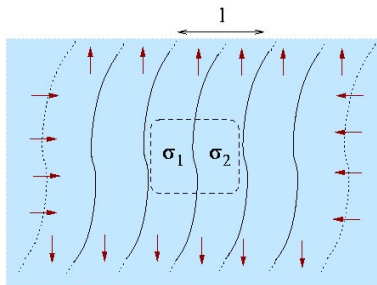
Soit t_n le temps tel que la largeur des filaments soit divisée par n .

$$\hat{\rho}_I(\kappa, t + t_n) = [\hat{\rho}_I(\kappa/n, t)]^n$$

Hypothèse 1 : indépendance



Hypothèse 2 : Pas de fluctuation de l'étirement moyen



Passage à une équation dynamique

Mélange d'un
scalaire passif

Motivations
Motivations

Modèles

Tests
Perspectives

Circulation
océanique à
grande échelle

Motivations
Méthode
But

Modèle
Résultats
Perspectives

Si la largeur des filaments est divisée par n

$$\widehat{\rho}_l(\kappa, t_n) = [\widehat{\rho}_l(\kappa/n, 0)]^n$$

En pratique, l'étirement est continu :

$$\partial_t \widehat{\rho}_l = s(t) [\widehat{\rho}_l \ln \widehat{\rho}_l - \kappa \partial_\kappa \widehat{\rho}_l]$$

Et la solution est ...

$$\widehat{\rho}(\kappa, t) = \left[\widehat{\rho} \left(\frac{\kappa}{f}, 0 \right) \right]^f, \quad f(t) = \exp \left(\int_0^t s(t') dt' \right)$$

Interprétation de $s(t)$: taux de dissipation des fluctuations de scalaire.

$$\partial_t c_2 = -s(t)c_2$$

Une autre équation dynamique

Modèle d'aggrégation de filaments de colorant. *Villermaux and Duplat, PRL (2003)*

$$\partial_t \hat{\rho} = s(t) \left[f(t) \left[\hat{\rho}^{1+1/f} - \hat{\rho} \right] - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho} \right]$$

avec

$$f(t) = \exp \left(\int_0^t s(t') dt' \right)$$

Dans ce cas, la variance décroît en

$$\partial_t c_2 = -s(t) [c_2 - c_1/f(t)]$$

Ce modèle prédit une convergence des PDF vers des distributions "gamma" :

$$\gamma(\sigma/\langle\sigma\rangle) = \frac{f^f}{\Gamma(f)} \frac{\sigma^{f-1}}{\langle\sigma\rangle^{f-1}} e^{-f\sigma/\langle\sigma\rangle}$$

Un tout autre modèle

LMSE Linear mean square estimate *Dopazo et O'Brien*

IEM Interaction by exchange with the mean *Villiermaux and Duvillon*

$$\partial_t \rho = s(t) \partial_\sigma [\rho (\sigma - \bar{\sigma})]$$

Solution explicite : la PDF conserve sa forme initiale aux cours de son évolution !

$$\rho(\sigma, t) = \rho(\sigma' + \bar{\sigma}, t) = \sqrt{\frac{c_2(0)}{c_2(t)}} \rho\left(\sqrt{\frac{c_2(0)}{c_2(t)}} \sigma' + \bar{\sigma}, 0\right)$$

where $c_2(t)$ is the variance of the distribution.

Mélange d'un
scalaire passif

Motivations

Motivations

Modèles

Tests

Perspectives

Circulation
océanique à
grande échelle

Motivations

Méthode

But

Modèle

Résultats

Persepctives

- Mélange par convolution $\partial_t \hat{\rho}_l = s(t) [\hat{\rho}_l \ln \hat{\rho} - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho}_l]$
- Processus d'aggrégation $\partial_t \hat{\rho} = s(t) [f(t) [\hat{\rho}^{1+1/f} - \hat{\rho}] - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho}]$
- Modèles LMSE, IEM $\partial_t \hat{\rho} = s(t) [-\kappa \hat{\rho} - \kappa \partial_\kappa \hat{\rho}]$

Test sur résultats d'une DNS

Mélange d'un
scalaire passif

Motivations

Motivations

Modèles

Tests

Perspectives

Circulation
océanique à
grande échelle

Motivations

Méthode

But

Modèle

Résultats

Perpectives

Eswaran and Pope PoF, 1988

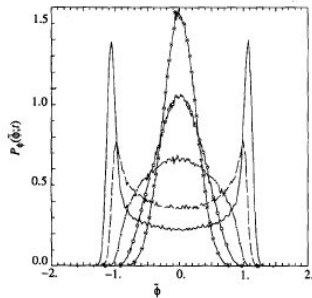
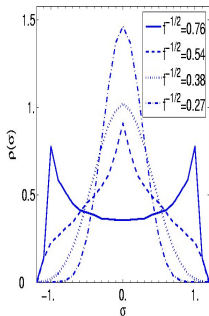
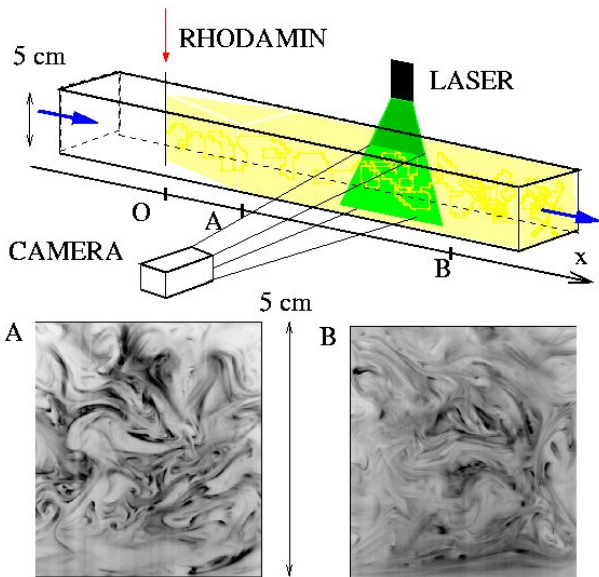
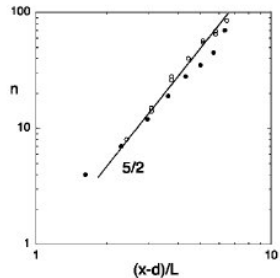
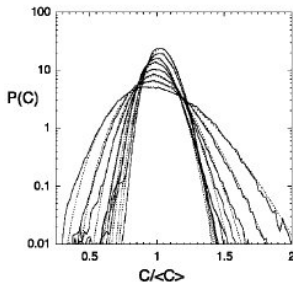


FIG. 16. The scalar pdf from simulation F2e ($Re_\lambda \approx 50$, $k_s/k_0 = 8$) at different times. Lines: — ($t\tau/l = 0.07$; $\phi'/\phi'_0 = 0.94$), --- (0.22; 0.76), ···· (0.42; 0.54), -·-· (0.62; 0.38), -x- (0.83; 0.27).

Test expérimental



Un résultat antérieur

Villermaux and Duplat PRL, 2003

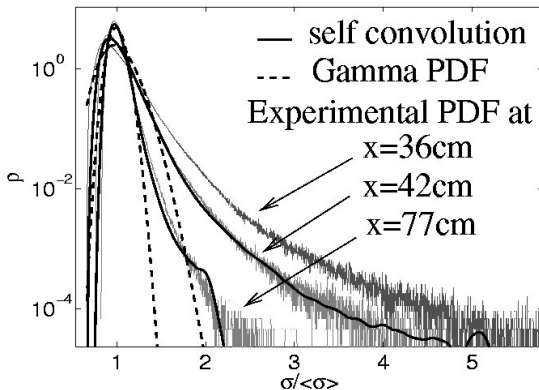
Séquence de gamma-distributions $\gamma(\sigma/\langle \sigma \rangle) = \frac{f^f}{\Gamma(f)} \frac{\sigma^{f-1}}{\langle \sigma \rangle^{f-1}} e^{-f\sigma/\langle \sigma \rangle}$

Motivation

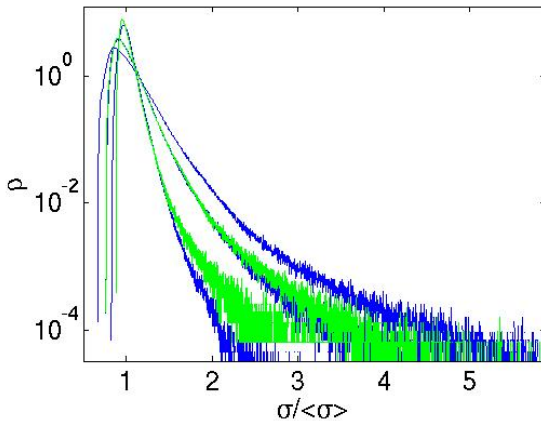
Ce résultat est-il générique ?

En particulier : dépend-il du système d'injection ?

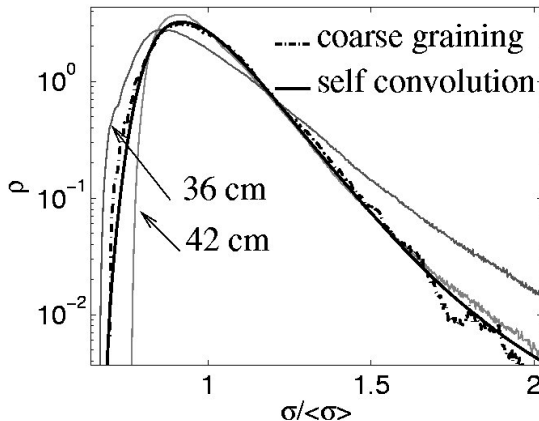
Injecteur "ligne"



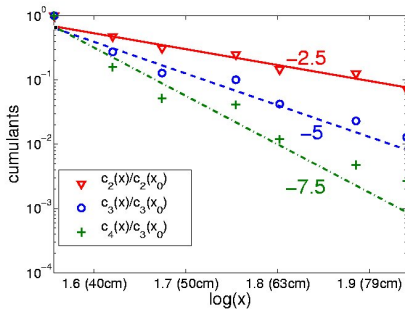
avec LMSE/IEM



Effet du filtrage



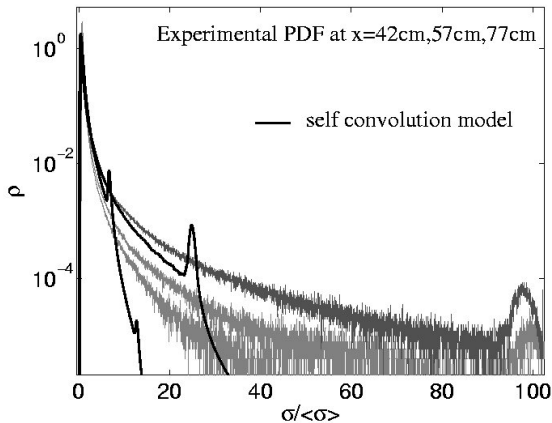
Premiers cumulants



$$c_m(t) = (-\partial_\kappa)^m \ln(\hat{\rho}_l(\kappa, t)) \big|_{\kappa=0}$$

$$c_m(t) = \frac{c_m(0)}{[f(t)]^{m-1}}$$

Injecteur "point"



Mélange d'un
scalaire passif

Motivations

Motivations

Modèles

Tests

Perspectives

Circulation
océanique à
grande échelle

Motivations

Méthode

But

Modèle

Résultats

Persepctives

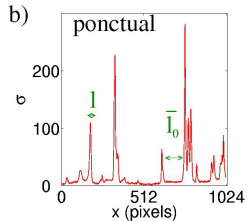
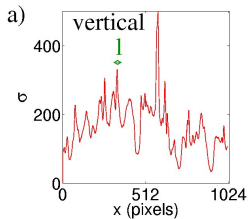
- 1 Pas de convergence vers des gamma-PDF
- 2 Le modèle d'évolution par convolution marche bien pour l'injecteur ligne, mais pas pour l'injecteur ponctuel.

POURQUOI ?

Rappel des hypothèses

- 1 On néglige les fluctuations de l'étirement des filaments
- 2 On suppose qu'il y a indépendance des concentrations de colorant à des distances séparées de l , l'échelle de filtrage

Indépendance...



Pouvait-on le prévoir ?

Critère sur le système d'injection

- Section du canal : $l_s X l_s$
- Section de l'injecteur ponctuel $\sim r^2$
- Section de l'injecteur ligne : $\sim r l_s$

les filaments de scalaire ont une longueur typique $\bar{l}_\sigma = r/f(t)$

Les “vides” persistent sur des longueurs $\bar{l}_0$.

Par conservation de $\bar{\sigma} = \bar{l}_\sigma / \bar{l}_0$:

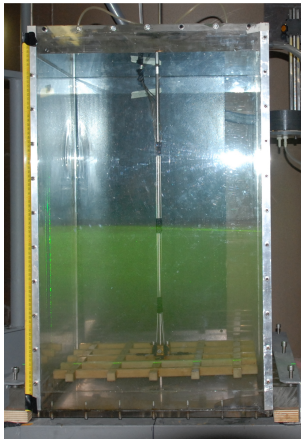
- Section de l'injecteur ponctuel $\bar{l}_0 \sim \frac{l_s}{f(t)}$
- Section de l'injecteur ligne : $\bar{l}_0 \sim \frac{l_s^2}{rf(t)}$

Conclusion

- ❶ Pas de convergence vers gamma PDF ; rôle du système d'injection.
- ❷ Mise en évidences de situations où les hypothèses du modèle ne sont pas satisfaites
- ❸ Avantages du modèle de mélange par convolution

Perspectives

Application du modèle au mélange de l'eau salée à l'eau douce ;
résultats expérimentaux.



Modèle 1D pour mélange d'un fluide stratifié de manière stable

Mélange d'un scalaire **actif** dans un cas **non homogène**.

but décrire l'évolution de la probabilité de mesurer une certaine flottabilité $b = g (\varrho - \varrho_0) / \varrho_0$ à une altitude z donnée.

- sédimentation
- diffusion turbulente
- **cascade turbulence**

$$\partial_t \rho = \partial_z \left(\kappa_b l e^{1/2} \partial_z \rho + \tau_b \rho (b - \langle b \rangle) \right) + \mathcal{D}$$

$$\partial_t e = \partial_z \left(\kappa_e l e^{1/2} \partial_z e \right) + l e^{1/2} \partial_z \langle b \rangle + \tau_b \left\langle b^2 - \langle b \rangle^2 \right\rangle - \epsilon_e l^{-1} e^{3/2} + \dots$$

$$l = \frac{l_f e^{1/2}}{e^{1/2} + \gamma l_f \sqrt{\partial_z \langle b \rangle}}$$

$\mathcal{D}$ dissipation par cascade turbulente...ce dont on vient de parler

Resultats préliminaires

