

RÉSUMÉ ANALYTIQUE

DE LA

THÉORIE DES MARÉES

TELLE QU'ELLE EST ÉTABLIE

DANS LA

MÉCANIQUE CÉLESTE DE LAPLACE

(Suite et fin.)¹

Dans les expressions des forces solaires F' , F'' et F''' , que nous avons indiquées plus haut, et par suite, dans l'analyse qui en découle, LAPLACE a supposé que l'astre se mouvait d'une manière *uniforme*, dans le plan de l'*Équateur*, et il a étendu ensuite cette hypothèse au mouvement de la Lune.

Il examine maintenant ce qui doit arriver lorsque le Soleil et la Lune, toujours mus dans le plan de l'*Équateur*, sont assujettis à des inégalités dans *leurs mouvements* et dans *leurs distances*.

Il imagine que dans les expressions de F' , F'' et F''' , on substitue à r et à ψ leurs développements en *sinus* et *cosinus* d'angles de la forme

$$2nt - 2qt + 2\varepsilon.$$

¹ Voir le numéro de mai, p. 419.

Ces expressions se transforment alors en une série de termes de la forme :

pour

$$F', \dots \sin^2 \theta \Sigma k \cos 2 (nt - qt + \varepsilon)$$

$$F'', \dots \sin \theta \cos \theta \Sigma k \cos 2 (nt - qt - \varepsilon)$$

$$F''', \dots \sin \theta \Sigma k \sin 2 (nt - qt + \varepsilon)$$

Le signe Σ des intégrales finies servant à désigner la somme de tous les termes de la forme.

$$k \cos 2 (nt - qt + \varepsilon)$$

ou

$$k \sin 2 (nt - qt + \varepsilon).$$

Le plus *considérable* de ces termes, dit LAPLACE, est celui qui dépend de l'angle

$$2nt - 2mt + 2\omega,$$

m étant le *mouvement moyen* de l'astre. C'est celui qui produit le *flux* et le *reflux* de la mer, dans le cas qu'il a considéré.

Il envisage alors les autres termes comme le résultat de l'action d'autant d'*astres* particuliers, mus *uniformément* dans le plan de l'Équateur. Il trouve, d'après cela, que la partie de la hauteur de la mer due à l'action du Soleil et dépendante de l'angle

$$2nt + 2\omega - 2\psi$$

est

$$\frac{PL}{r^3} \cos 2 (nt + \omega - \psi - \lambda) + P Q \frac{d}{dt} \sin 2 (nt + \omega - \psi - \lambda)$$

expression dans laquelle, $\lambda = O - nT$; et P, Q, O et T sont les nouvelles constantes indiquées ci-dessus, les mêmes pour tous les astres.

Il obtient, par analogie, un résultat analogue pour l'action de la Lune et il trouve enfin, en réunissant tous les termes et en tenant compte de la partie *indépendante de la rotation* de la Terre,

$$\begin{aligned} \alpha y = & -\frac{1 + 3 \cos 2\theta}{8g \left(1 - \frac{3}{5} \rho\right)} \left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) \\ & + P \left[\frac{L}{r^3} \cos 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) + \frac{L'}{r'^3} \cos 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) \right] \\ & + PQ \frac{d}{dt} \left[\frac{L}{r^3} \sin 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) + \frac{L'}{r'^3} \sin 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) \right] \end{aligned}$$

Par des considérations indiquées dans l'analyse qui le conduit à cette expression, LAPLACE fait voir que le temps t devra être diminué de la *constante* T dans les termes multipliés par P , et que la différentielle doit être prise en faisant nt *constant*.

Pour étendre son analyse au cas de la nature, LAPLACE suppose ensuite que le Soleil et la Lune ne se meuvent plus dans le plan de l'Équateur.

En appelant $\alpha V'$ la fonction

$$\frac{3LR^2}{2r^3} \left\{ \left[\sin v \cos \theta + \cos v \sin \theta \cos (nt + \varpi - \psi) \right]^2 - \frac{4}{3} \right\}$$

action du Soleil, par exemple, sur la molécule dm , nous avons indiqué, en considérant les trois composantes F' , F'' , F''' de cette force, que l'on a :

$$F' = \alpha \left(\frac{dV'}{dR} \right); \quad F'' = \alpha \left(\frac{dV'}{d\theta} \right); \quad F''' = \alpha \left(\frac{dV'}{d\varpi} \right) \frac{1}{\sin \theta}.$$

En différentiant $\alpha V'$ par rapport à R et en faisant ensuite $R = 1$; puis différentiant $\alpha V'$ par rapport à θ et enfin par rapport à ϖ , LAPLACE arrive à trois expressions de F' , F'' et F''' , qu'il écrit spontanément. F' et F'' contiennent des termes indépendants du mouvement de rotation de la Terre, et avec F''' , des termes contenant le sinus ou le cosinus de l'arc $(nt + \varpi - \psi)$ pour le Soleil et de l'arc $(nt + \varpi - \psi')$ pour la Lune et enfin, des termes contenant le sinus ou le cosinus de l'arc $2(nt + \varpi - \psi)$ pour le Soleil ou l'arc $2(nt + \varpi - \psi')$ pour la Lune.

Si dans les termes contenant les arcs $2(nt + \varpi - \psi)$ ou $2(nt + \varpi - \psi')$ on substitue, comme ci-dessus, r et ψ ou r' et ψ' développés en fonction du temps, il en résultera, d'après des considérations analy-

tiques analogues à celles indiquées précédemment dans l'expression de la hauteur de la mer, des expressions de la forme

$$P \left[\frac{L \cos^2 v}{r^3} \cos 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v' \cos 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) \right] \\ + PQ \frac{d}{dt} \left[\frac{L \cos^2 v}{r^3} \sin 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v' \sin 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) \right].$$

En développant pareillement les termes qui dépendent de l'angle $(nt + \varpi - \psi)$ et de l'angle $(nt + \varpi - \psi')$ et à l'aide des mêmes considérations analytiques, LAPLACE trouve que la hauteur de la mer doit encore contenir les expressions suivantes :

$$A \left[\frac{L}{r^3} \sin v \cos v \cos (nt + \varpi - \psi - \gamma) \right. \\ \left. + \frac{L'}{r'^3} \sin v' \cos v' \cos (nt + \varpi - \psi' - \gamma) \right] \\ + B \frac{d}{dt} \left[\frac{L}{r^3} \sin v \cos v \sin (nt + \varpi - \psi - \gamma) \right. \\ \left. + \frac{L'}{r'^3} \sin v' \cos v' \sin (nt + \varpi - \psi' - \gamma) \right]$$

A, B et γ étant encore trois constantes arbitraires que l'observation seule peut déterminer dans chaque port, et, comme précédemment, le temps t devant être diminué d'une constante T dans les termes multipliés par P et Q et d'une constante T' dans ceux multipliés par A et B.

En réunissant toutes les hauteurs partielles que nous venons d'indiquer, LAPLACE trouve enfin, pour la hauteur entière de la mer à un moment t

$$(91) \text{ ou } (O) \left\{ \begin{aligned} \alpha y = & -\frac{(1 + 3 \cos 2\theta)}{8g \left(1 - \frac{3}{3\rho}\right)} \left[\frac{L}{r^3} (1 - 3 \sin^2 v) + \frac{L'}{r'^3} (1 - 3 \sin^2 v') \right] \\ & + A \left[\frac{L}{r^3} \sin v \cos v \cos (nt + \varpi - \psi - \gamma) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L'}{r'^3} \sin v' \cos v' \cos (nt + \varpi - \psi' - \gamma) \right] \\ & + B \frac{d}{dt} \left[\frac{L}{r^3} \sin v \cos v \sin (nt + \varpi - \psi - \gamma) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L'}{r'^3} \sin v' \cos v' \sin (nt + \varpi - \psi' - \gamma) \right] \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &+ P \left[\frac{L}{r^3} \cos^2 v \cos 2(nt + \omega - \psi - \lambda) \right. \\ &\quad \left. + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v' \cos 2(nt + \omega - \psi' - \lambda) \right] \\ &+ P Q \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{L}{r^3} \cos^2 v \sin 2(nt + \omega - \psi - \lambda) \right. \\ &\quad \left. + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v' \sin 2(nt + \omega - \psi' - \lambda) \right] \end{aligned} \right.$$

Dans cette expression, les différentielles doivent être prises en supposant nt constant, et les constantes $T, T', A, B, P, Q, \gamma$ et λ doivent être déterminées, dans chaque port, par l'observation!

Après cette longue et délicate analyse qui le fait enfin arriver à la formule (O), plutôt empirique que mathématique, LAPLACE consacre un chapitre à la comparaison de la formule précédente avec les observations. Autrement dit, il étudie les conséquences de cette formule qui exprime la valeur αy , hauteur de la mer à un instant quelconque, lorsque l'on suppose, ainsi que nous l'avons déjà dit, que la mer est entièrement recouverte d'eau, que le fond de la mer a une forme et une profondeur quelconques et que les astres soumis dans leurs mouvements à plusieurs inégalités, ne sont plus considérés comme se mouvant dans le plan de l'Équateur.

Mais nous ne devons pas oublier que les mouvements tangentiels des eaux, αu et αv , ne sont pas considérés et n'entrent pour rien, évidemment, dans cette valeur de αy .

En partant de la formule (O), LAPLACE cherche d'abord la valeur de t qui correspond à la hauteur maximum de αy .

Il pose alors $\frac{dy}{dt} = 0$.

Mais en différentiant l'expression de αy établie par cette formule (O), il pense que l'on peut regarder comme constantes, les quantités

$$v, v', r, r', \psi \text{ et } \psi'.$$

Il croit aussi qu'on peut négliger, sans erreur sensible, les termes multipliés par B , parce que, dit-il, les oscillations dépendantes de

l'angle $(nt + \varpi - \psi - \lambda)$ et dont la période est *d'un jour* à peu près, étant *très petites* dans nos ports, il est vraisemblable que le coefficient B est *insensible*. Il néglige pareillement, pour un instant, les termes multipliés par Q, parce que, dit-il, les observations lui ont décélé que ce coefficient est *très peu considérable*.

Nous devons immédiatement faire remarquer *que si ces suppressions peuvent avoir lieu pour les ports de la Manche, rien n'autorise à le faire pour tous les ports du Globe.*

La détermination de la relation

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

en négligeant encore le terme multiplié par $\frac{A}{2P}$, qu'on obtient après avoir établi la relation cherchée, et que LAPLACE trouve encore très petit dans nos ports, le conduit à l'équation

$$(92) \quad \text{Tang } 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\frac{L}{r^3} \cos^2 v \sin 2(\psi - \psi')}{\frac{L'}{r'^3} \cos^2 v' + \frac{L}{r^3} \cos^2 v \cos 2(\psi - \psi')}$$

équation qui permettra de trouver le temps t correspondant à la *haute mer* et à la *basse mer*.

En *introduisant cette valeur de t* , relative à la haute mer, dans l'expression ay , il trouve, ensuite, en nommant y' la demi-somme des hauteurs des pleines mers du matin et du soir, ce qu'il appelle dans la suite, la *hauteur moyenne absolue* de la marée d'un jour, et en négligeant aussi ce que devient, par cette valeur particulière de t , le terme multiplié par A, il trouve, dis-je,

$$(93) \quad y' = -\frac{(1 + 3 \cos 2\theta)}{8g \left(1 - \frac{3}{5\rho}\right)} \left[\frac{L}{r^3} (1 - 3 \sin^2 v) + \frac{L'}{r'^3} (1 - 3 \sin^2 v') \right] \\ + P \sqrt{\left(\frac{L}{r^3} \cos^2 v\right)^2 + \frac{2L}{r^3} \cos^2 v \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v' \cos^2(\psi' - \psi) + \left(\frac{L'}{r'^3} \cos^2 v'\right)^2}$$

Il obtient ensuite pour hauteur de la *basse mer*

$$(94) \quad y'' = -\frac{(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5}\rho\right)} \left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v) + \frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v') \right] + (A')$$

$$- P \sqrt{\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v\right)^2 + \frac{2L}{r^3}\cos^2 v \frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' \cos^2(\psi'-\psi) + \left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\right)^2},$$

dans laquelle (A') représente le terme de αy multiplié par A, quand on y remplace la valeur de $(nt + \varpi - \psi' - \lambda)$ donnée par la formule (92) et relative à la basse mer.

On trouve alors pour *Marée totale*, en retranchant y'' de y' ,

$$(95) \quad y''' = -(A') + 2P \sqrt{\left(\frac{L}{r^3}\cos^2 v\right)^2 + \frac{2L}{r^3}\cos^2 v \frac{L'}{r'^3}\cos^2 v' \cos^2(\psi'-\psi) + \left(\frac{L'}{r'^3}\cos^2 v'\right)^2}.$$

LAPLACE fait ensuite voir que vers les syzygies, où $\psi' - \psi$ est presque nul, on a $nt + \varpi - \psi' = \lambda$, et qu'alors on trouve

$$(A) = -A \left(\frac{L}{r^3} \sin v \cos v + \frac{L'}{r'^3} \sin v' \cos v' \right) \cos(\lambda - \gamma)$$

$$(A') = A \left(\frac{L}{r^3} \sin v \cos v + \frac{L'}{r'^3} \sin v' \cos v' \right) \cos(\gamma - \lambda).$$

expressions qui font bien voir que (A) et (A') sont très petits.

Il modifie encore les valeurs de y' et de y'' vers les syzygies, en développant, suivant la série de MAC-LAURIN, le terme qui multiplie P, suivant les puissances croissantes de $(\psi' - \psi)$, mais en négligeant la quatrième puissance de cette différence et en faisant $\sin(\psi' - \psi) = \psi' - \psi$.

Il trouve ainsi, pour hauteur de la pleine mer,

$$(96) \quad y' = -\frac{(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5}\rho\right)} \left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v) + \frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v') \right]$$

$$+ P \left(\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v' \right)$$

$$- 2P \frac{\frac{L}{r^3} \cos^2 v \cdot \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v'}{\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v'} \left[(\psi' - \psi)^2 + \frac{1}{4} q^2 \right]$$

et pour *marée totale*

$$(97) \quad y''' = 2P \left(\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v' \right) \\ - \frac{4P \frac{L}{r^3} \cos^2 v \cdot \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v'}{\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v'} \left[(\psi' - \psi)^2 + \frac{1}{8} q^2 \right]$$

q représente, dans ces deux formules, la variation de l'arc $(\psi' - \psi)$ dans l'intervalle de deux pleines mers *consécutives*.

LAPLACE examine ensuite l'influence des déclinaisons des astres sur les marées. Il développe pour cela les expressions y' et y''' que nous avons données (93) et (95), en les considérant au moment des *solstices* et des *équinoxes*.

Il fait remarquer que comme le *premier terme* de y' est *très petit*, on peut supposer que les variables r , v , r' et v' se rapportent à l'instant même de la syzygie.

Lorsqu'on aura à faire une *somme* des valeurs de y' relatives à *deux syzygies consécutives*, on pourra supposer que, *dans ce terme*, r' est égal à la moyenne distance de la Lune à la Terre dans les syzygies; car il est évident, dit-il, que si la Lune est *apogée* dans une syzygie, elle est *périgée* dans l'autre. Quant à r il est à peu près égal à la moyenne distance de la Terre au Soleil, dans les syzygies des équinoxes, parce que c'est au 1^{er} avril, environ, qu'a lieu cette distance moyenne; et si l'on considère autant de syzygies vers le solstice d'hiver que vers le solstice d'été, on peut supposer que r est égal à cette distance moyenne.

En désignant ensuite par ϵ' l'*inclinaison* de l'orbite lunaire sur l'équateur et par Γ' la distance de la Lune à son *nœud ascendant* relativement à l'Équateur; en nommant t le temps écoulé depuis le *maximum* de la *marée* jusqu'au moment d'une observation quelconque (t étant *négligé* relativement aux observations antérieures au maximum); en supposant, en outre, le mouvement de la Lune, dans son orbite, *uniforme* pendant le temps t , LAPLACE trouve qu'en désignant par v'_0 et Γ'_0 les valeurs de v' et de Γ' au moment de la syzygie, v' étant la déclinaison à un moment quelconque, on obtient, à l'aide de la série de MAC-LAURIN,

$$\cos^2 v' = \cos^2 v'_0 - t \frac{d\Gamma'}{dt} \sin^2 \varepsilon' \sin 2\Gamma'_0 - t^2 \left(\frac{d\Gamma'}{dt} \right)^2 \sin^2 \varepsilon' \cos 2\Gamma'_0.$$

En ne considérant que des syzygies équinoxiales ou solsticiales, et en assez grand nombre, LAPLACE fait remarquer que le terme

$$t \frac{d\Gamma'}{dt} \sin^2 \varepsilon' \sin^2 \Gamma'_0$$

disparaît de la somme des valeurs de y' et qu'on peut alors écrire

$$\cos^2 v' = \cos^2 v'_0 - t^2 \left(\frac{d\Gamma'}{dt} \right)^2 (\sin^2 \varepsilon' - 2 \sin^2 v'_0).$$

En prenant ensuite, pour *unité* de temps, *l'intervalle de deux marées consécutives*, du matin ou du soir, vers les syzygies, et en appelant u le moyen mouvement synodique de la Lune on aura, dit-il, en tenant compte de la VARIATION lunaire, dont l'effet est environ les $0,04 u$,

$$\left(\frac{d\Gamma'}{dt} \right)^2 = 1,165 u^2.$$

La valeur de $\cos^2 v'$ devient donc

$$\cos^2 v' = \cos^2 v'_0 - 1,165 t^2 u^2 (\sin^2 \varepsilon' - 2 \sin^2 v'_0)$$

En considérant ensuite le terme de y' , multiplié par $2P$, il trouve que ce terme peut s'écrire

$$\frac{2P \frac{L}{r^3} \frac{L'}{r'^3} \cos^2 \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \right) t^2 u^2}{\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v'}$$

ε étant, pour le Soleil, ce qu'il nomme ε' pour la Lune.

En nommant alors Y' la somme des valeurs de y correspondantes à $2i$ syzygies équinoxiales, il obtient

$$(98) \quad Y' = -\frac{2i(1+3\cos 2\theta)}{8g\left(1-\frac{3}{5\rho}\right)} \left[\frac{L}{r^3}(1-3\sin^2 v) + \frac{L'}{r'^3}(1-3\sin^2 v') \right]$$

$$+ 2iP \left(\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v' \right)$$

$$- 2iP \frac{L'}{r'^3} \left(t^2 + \frac{1}{16} \right) u^2 \left\{ \frac{1,165(\sin^2 \varepsilon' - 2\sin^2 v')}{\frac{2L}{r^3} \cos^2 \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \right)} + \frac{\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v'}{\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v'} \right\}$$

Dans cette formule, $\cos^2 v$, $\cos^2 v'$, $\sin^2 v'$ et $\cos^2 \frac{(\varepsilon + \varepsilon')}{2}$ sont les valeurs moyennes de toutes les valeurs de ces quantités relatives aux $2i$ syzygies.

La variation de $\frac{1}{r'^3}$ a été négligée parce qu'on suppose que l'on considère, à la fois, deux syzygies consécutives.

LAPLACE pense que la même formule peut représenter la somme des valeurs correspondantes de y' dans $2i$ syzygies solsticiales dont la moitié se rapporte au solstice d'hiver.

Par des considérations analogues, l'auteur trouve que la *marée totale*, c'est-à-dire l'expression de y'' considérée relativement à $2i$ syzygies équinoxiales ou à $2i$ syzygies solsticiales, conduit à la formule

$$y'' = 4iP \left(\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v' \right)$$

$$- 4iP \frac{L'}{r'^3} \left(t^2 + \frac{1}{32} \right) u^2 \left\{ \frac{1,165(\sin^2 \varepsilon' - 2\sin^2 v')}{\frac{2L}{r^3} \cos^2 \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \right)} + \frac{\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v'}{\frac{L}{r^3} \cos^2 v + \frac{L'}{r'^3} \cos^2 v'} \right\}$$

Pour terminer cette longue analyse, LAPLACE examine encore l'influence des termes dépendant de Q , termes qu'il a négligés dans son équation (O).

En appelant m' le mouvement moyen de la Lune, il trouve que, dans les syzygies *équinoxiales*, le terme dépendant de Q dans les expressions Y' et Y'' (98) et (99) ne fait que changer

$$L' \text{ en } L' (1 - 2 m' Q \cos \epsilon')$$

et dans les syzygies *solsticiales*, ne fait que changer

$$L' \text{ en } L' \left(1 - \frac{2 m' Q}{\cos v'} \right).$$

En sorte, dit-il, que la différence des valeurs de L' , dans ce cas, peut servir à déterminer Q .

C'est à l'aide des formules (98) et (99) donnant Y' et Y'' pour les *hauteurs*, et à l'aide de la formule (92), que LAPLACE a cru pouvoir faire la comparaison de sa théorie aux observations.

Le cinquième volume de la *Mécanique céleste* contient une seconde recherche de LAPLACE sur la théorie des marées. Nous allons essayer de donner un résumé de ce supplément d'analyse sur cette délicate question.

Dans le résumé que nous venons de donner, aussi complet qu'il nous a été possible, on a pu voir que la théorie de l'illustre géomètre est basée sur le principe suivant :

« *L'état d'un système de corps dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu, par les résistances qu'éprouve le système, est périodique comme les forces qui l'animent.* »

C'est ce principe, combiné avec celui de la coexistence des oscillations *très petites*, qui a permis à LAPLACE, grâce à un certain nombre de *constantes arbitraires*, d'expliquer analytiquement le phénomène des marées. Comme on a pu le voir, la formule finale (O), qui renferme à elle seule tout le résultat de la théorie, ne représente à la vérité que *l'oscillation ou plutôt l'élévation, en un point donné, et à un moment donné sur le rayon vecteur, de la molécule liquide, appartenant à la surface de la masse fluide qui est supposée envelopper complètement un noyau solide de forme quelconque.*

C'est toujours avec le même ordre d'idées que LAPLACE a entrepris une seconde recherche sur la théorie des marées, et a cru utile, dans ce nouveau travail, d'introduire, dans ses formules, les *inclinaisons* des orbites des astres sur l'Équateur, ainsi que les *distances angulaires* de ces astres à l'intersection de leur orbite avec l'Équateur.

LAPLACE reprend l'expression

$$(100) \text{ ou } (a) \quad \frac{3L}{2r^3} \left\{ [\cos \theta \sin v + \sin \theta \cos v \cos (nt + \varpi - \psi)]^2 - \frac{1}{3} \right\}$$

dont les différentielles partielles représentent, comme nous l'avons vu, les trois composantes de la force due à l'action attractive de l'astre L et qui produit la marée.

En nommant ε l'*inclinaison de l'orbite de l'astre à l'Équateur* et φ sa distance angulaire à l'intersection de l'orbite à l'Équateur, LAPLACE introduit, dans l'expression (100), les angles ε et φ , à la place des angles v et ψ .

Il écrit *spontanément* l'équation, ainsi transformée. Nous allons faire voir à l'aide de quels calculs on peut opérer cette transformation :

En considérant, sur la sphère céleste, le triangle sphérique rectangle formé par l'orbite de l'astre L, son cercle de *déclinaison* et l'Équateur; en comptant les ascensions droites de l'astre à partir du *nœud ascendant*, nous aurons évidemment, pour côtés de ce triangle sphérique,

φ hypoténuse,

v et ψ côtés de l'angle droit;

ε est l'angle opposé au côté v .

Ce triangle donne les relations

$$(1) \quad \sin v = \sin \varepsilon \sin \varphi$$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi \cos \varepsilon \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \varepsilon = \frac{\sin \varphi \cos \varepsilon}{\cos v \cos \psi} \quad \text{d'où}$$

$$(2) \quad \cos v \sin \psi = \cos \varepsilon \sin \varphi$$

$$(3) \quad \cos v \cos \psi = \cos \varphi.$$

En élevant (4) au carré, cette relation peut s'écrire

$$(4) \quad \cos^2 v = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \varepsilon) + \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \cos 2\varphi.$$

En multipliant (2) par (3), on a

$$(5) \quad \cos^2 v \sin 2\psi = \cos \varepsilon \sin 2\varphi$$

En développant le carré indiqué dans la formule (a) on a

$$\frac{3L}{2r^2} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \theta \sin^2 v + 2 \sin \theta \cos \theta \sin v \cos v \cos (nt + \omega - \psi) \\ + \sin^2 \theta \cos^2 v \cos^2 (nt + \omega - \pi) - \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

En considérant $(nt + \omega)$ et ψ comme deux arcs, nous développons le $\cos (nt + \omega - \psi)$ et le $\cos^2 (nt + \omega - \psi)$; la formule devient alors

$$\frac{3L}{2r^2} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \theta \sin^2 v \\ + 2 \sin \theta \cos \theta \sin v \cos v \cos (nt + \omega) \cos \psi \\ + 2 \sin \theta \cos \theta \sin v \cos v \sin (nt + \omega) \sin \psi + \sin^2 \theta \cos^2 v \cos^2 (nt + \omega) \cos^2 \psi \\ + 2 \sin^2 \theta \cos^2 v \cos (nt + \omega) \cos \psi \sin (nt + \omega) \sin \psi \\ + \sin^2 \theta \cos^2 v \sin^2 (nt + \omega) \sin^2 \psi - \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

Mais d'après les formules trigonométriques ci-dessus on trouve

de (1)	$\sin^2 v = \sin^2 \varepsilon \sin^2 \varphi,$	qu'on peut substituer dans	1
de (4) et (3)	$\sin v \cos v \cos \psi = \sin \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi$	»	2
de (4) et (2)	$\sin v \cos v \sin \psi = \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 \varphi$	»	3
de (3)	$\cos^2 v \cos^2 \psi = \cos^2 \varphi$	»	4
de (2)	$\cos^2 v \sin^2 \psi = \cos^2 \varepsilon \sin^2 \varphi$	»	6
de (2) et (3)	$\cos^2 v \sin \psi \cos \psi = \cos \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi$	»	5.

La formule devient alors

$$\left(\frac{3L}{2r^2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \theta \sin^2 \varepsilon \sin^2 \varphi \\ + 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi \cos (nt + \omega) \\ + 2 \sin \theta \cos \theta \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 \varphi \sin (nt + \omega) \\ + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cos^2 (nt + \omega) + \sin^2 \theta \cos^2 \varepsilon \sin^2 \varphi \sin^2 (nt + \omega) \\ + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos \varepsilon \sin 2\varphi \sin (2nt + 2\omega) - \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

En remplaçant ensuite,

$$\sin^2 \varphi \quad \text{par} \quad \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi & \text{ par } \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \\ \sin^2 (nt + \varpi) & \text{ par } \frac{1 - \cos (2nt + 2\varpi)}{2} \\ \cos^2 (nt + \varpi) & \text{ par } \frac{1 + \cos (2nt + 2\varpi)}{2} \end{aligned}$$

et

$$\cos^2 \varepsilon \text{ par } \left(\cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon - \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \right)^2 = \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon + \sin^4 \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{\sin^2 \varepsilon}{2},$$

on obtient, en développant,

$$(a) \frac{3L}{2r^2} \left\{ \begin{aligned} & \cos^2 \theta \sin^2 \varepsilon \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left\{ \begin{array}{l} \sin \varepsilon \sin 2\varphi \cos (nt + \varpi) \\ + \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin (nt + \varpi) \\ - \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos 2\varphi \sin (nt + \varpi) \end{array} \right. \\ & + \frac{\sin^2 \theta}{4} + \frac{\sin^2 \theta \cos 2\varphi}{4} + \frac{\sin^2 \theta \cos (2nt + 2\varpi)}{4} \\ & + \frac{\sin^2 \theta \cos 2\varphi \cos (2nt + 2\varpi)}{4} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varepsilon}{4} - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varepsilon \cos 2\varphi}{4} \\ & - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varepsilon \cos (2nt + 2\varpi)}{4} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varepsilon \cos 2\varphi \cos (2nt + 2\varpi)}{4} \\ & + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos \varepsilon \sin 2\varphi \sin (2nt + 2\varpi) \dots - \frac{1}{3}. \end{aligned} \right.$$

Mais, on a aussi,

$$\sin \varepsilon \sin 2\varphi \cos (nt + \varpi) = \sin \varepsilon \left(\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} + \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin 2\varphi \cos (2nt + 2\varpi)$$

$$\text{et } -\sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos 2\varphi \sin (nt + \varpi) = -\sin \varepsilon \left(\cos^2 \frac{\varepsilon}{2} - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \right) \cos 2\varphi \sin (nt + \varpi).$$

La somme donne

$$\left. \begin{array}{l} \sin \varepsilon \sin 2\varphi \cos (nt + \varpi) \\ - \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos 2\varphi \sin (nt + \varpi) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\sin \varepsilon \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{2} \right) \sin (nt + \varpi - 2\varphi) \\ + \sin \varepsilon \left(\frac{1 - \cos \varepsilon}{2} \right) \sin (nt + \varpi + 2\varphi). \end{array} \right.$$

On a encore

$$\frac{\sin^2 \theta}{4} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varepsilon}{4} = \frac{1}{4} \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \varepsilon)$$

et

$$\frac{\sin^2 \theta \cos 2\varphi}{4} - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varepsilon \cos 2\varphi}{4} = \frac{\sin^2 \theta}{4} \cos 2\varphi \sin^2 \varepsilon.$$

En ayant égard à ces relations, la formule (a) pourra s'écrire

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{3L}{2r^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \varepsilon + \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \varepsilon) \sin^2 \theta - \frac{1}{3} \\ - \frac{1}{2} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \cdot \sin^2 \varepsilon \cos 2\varphi \end{array} \right. \\ + \frac{3L}{2r^2} \sin \theta \cos \theta \left\{ \begin{array}{l} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin (n t + \varpi) \\ - \sin \varepsilon \left(\frac{1 + \cos \varepsilon}{2} \right) \sin (n t + \varpi - 2\varphi) \\ + \sin \varepsilon \left(\frac{1 - \cos \varepsilon}{2} \right) \sin (n t + \varpi + 2\varphi) \end{array} \right. \\ + \frac{3L}{4r^2} \sin^2 \theta \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos (2 n t + 2 \varpi)}{2} + \frac{\cos 2 \varphi \cos (2 n t + 2 \varpi)}{2} \\ - \frac{\cos^2 \varepsilon \cos (2 n t + 2 \varpi)}{2} + \frac{\cos^2 \varepsilon \cos 2 \varphi \cos (2 n t + 2 \varpi)}{2} \\ + \cos \varepsilon \sin 2 \varphi \sin (2 n t + 2 \varpi). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Si nous remplaçons maintenant

$$\cos^2 \varepsilon \text{ par } \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon + \sin^4 \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{\sin^2 \varepsilon}{2}$$

et si nous remarquons que

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon + \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \\ &= \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon + \sin^4 \frac{1}{2} \varepsilon + 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \\ &= \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon + \sin^4 \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{\sin^2 \varepsilon}{2} \end{aligned}$$

et par conséquent que

$$1 - \frac{\sin^2 \varepsilon}{2} = \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon + \sin^4 \frac{1}{2} \varepsilon,$$

et aussi que

$$\cos \varepsilon = \left(\cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon - \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \right) \left(\cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon + \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \right) = \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon - \sin^4 \frac{1}{2} \varepsilon$$

les trois termes

$$\begin{aligned} &\frac{\cos 2 \varphi \cos (2 n t + 2 \varpi)}{2} \\ &+ \cos^2 \varepsilon \cos 2 \varphi \cos (2 n t + 2 \varpi) \\ &+ \cos \varepsilon \sin 2 \varphi \cos (2 n t + 2 \varpi) \end{aligned}$$

de l'expression (a) deviendront

$$\frac{\cos 2\varphi \cos (2nt + 2\omega)}{2} \left(t + \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon + \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ + \sin 2\varphi \sin (2nt + 2\omega) \left(\cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon - \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \right)$$

ou, en réduisant les termes,

$$- \frac{\cos^2 \varepsilon \cos (2nt + 2\omega)}{2} + \cos \frac{(2nt + 2\omega)}{2}$$

qui donnent

$$\frac{\sin^2 \varepsilon \cos (2nt + 2\omega)}{2},$$

et on arrivera finalement à la relation (b) donnée par LAPLACE :

$$(101) \text{ ou } (b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{3L}{2r^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \varepsilon + \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \varepsilon) \sin^2 \theta - \frac{1}{3} \\ - \frac{1}{2} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \varepsilon \cos 2\varphi \end{array} \right\} \\ + \frac{3L}{2r^3} \sin \theta \cos \theta \left\{ \begin{array}{l} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin (nt + \omega) \\ - \sin \varepsilon \frac{(1 + \cos \varepsilon)}{2} \sin (nt + \omega - 2\varphi) \\ + \sin \varepsilon \frac{(1 - \cos \varepsilon)}{2} \sin (nt + \omega - 2\varphi) \end{array} \right\} \\ + \frac{3L}{4r^3} \sin^2 \theta \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon \cos (2nt + 2\omega - 2\varphi) \\ + \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \cos (2nt + 2\omega + 2\varphi) \\ + \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \cos (2nt + 2\omega) \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

De cette manière, la valeur (a) est exprimée en fonctions de ε et des sinus et cosinus des arcs $(nt + \omega)$ et $(nt + \omega \pm \varphi)$, et du $\cos (2nt + 2\omega \pm 2\varphi)$.

Si l'on ne considère, dans les observations de marées, dit LAPLACE, que l'excès d'une haute mer sur l'une des deux basses mers voisines; et si, de plus, on prend cet excès en nombre égal, dans les syzygies des deux équinoxes ou des deux solstices; enfin, si pour détruire l'effet de la parallaxe lunaire, on considère les trois syzygies ou les trois quadratures, les plus voisines de l'équinoxe ou du solstice, en

doublant les observations relatives à la syzygie ou à la quadrature intermédiaires¹; le premier et le second terme de (b) disparaissent dans la détermination de ces *excès*, et les résultats des observations ne dépendent plus que des flux relatifs aux angles

$$\begin{aligned} 2nt + 2\omega \\ 2nt + 2\omega - 2\varphi \\ 2nt + 2\omega + 2\varphi. \end{aligned}$$

flux dont la période est d'environ un demi-jour.

En négligeant encore le terme en $\sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon$, comme étant très petit, la formule (b) se réduit aux deux termes

$$\begin{aligned} \frac{3L}{4r^3} \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \theta \cos (2nt + 2\omega - 2\varphi) \\ + \frac{3L}{4r^3} \sin^2 \theta \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \cos (2nt + 2\omega), \end{aligned}$$

termes qui produisent, dit LAPLACE, en s'appuyant sur les considérations analytiques précédemment indiquées, deux flux partiels que l'on peut représenter par

$$\begin{aligned} \frac{AL}{r^3} \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon \cos (2nt - 2mt + 2\omega - 2\lambda) \\ + \frac{BL}{r^3} \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \cos (2nt + 2\omega - 2\gamma). \end{aligned}$$

¹ Comme r varie d'une syzygie à l'autre, LAPLACE prend une *sorte de moyenne* :

Si E = l'excès à la 1^{re} syzygie,

E' = l'excès à la 2^{me},

E'' = l'excès à la 3^{me},

avec les deux premiers on aura $\frac{E + E'}{2} = E_m$ et avec les deux derniers $\frac{E' + E''}{2} = E'_m$; d'où

$$\frac{E'_m + E_m}{2} = \frac{E + 2E' + E''}{4}.$$

m étant le mouvement moyen de l'astre dans son orbite et A, B, λ et γ des *constantes* dépendantes des circonstances du port.

LAPLACE considère ces deux flux comme étant produits par deux astres *fictifs* dont le premier aurait pour masse

$$L \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon$$

et l'autre

$$\frac{1}{2} L \sin^2 \varepsilon.$$

En discutant le *maximum* et le *minimum* que produisent ces deux flux, il fait voir que c'est de la *différence des deux constantes* γ et λ , que dépend le *retard du maximum* des pleines mers sur le temps de la *conjonction* ou de l'*opposition* des deux astres fictifs.

En considérant de la même manière l'action de la Lune, il trouve que les actions *réunies* de la Lune et du Soleil, en se plaçant dans les conditions d'observations que nous avons indiquées ci-dessus, donnent pour *excès* d'une hauteur de la mer sur l'une des deux basses mers voisines

$$(101) \text{ ou } (A') \left\{ \begin{array}{l} \frac{A L}{r^3} \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon \cos (2 n t + 2 \varpi - 2 m t - 2 \lambda) \\ + \frac{1}{2} \frac{B L}{r^3} \sin^2 \varepsilon \cos (2 n t + 2 \varpi - 2 \gamma) \\ + \frac{A' L'}{r'^3} \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon' \cos (2 n t + 2 \varpi - 2 m' t - 2 \lambda') \\ + \frac{1}{2} \frac{B' L'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \cos (2 n t + 2 \varpi - 2 \gamma') \end{array} \right.$$

LAPLACE admet que la constante B' peut être considérée comme égale à B ; et que $\gamma' = \gamma + \delta$, δ étant l'ascension droite de l'intersection de l'orbe lunaire avec l'Équateur.

Quant aux constantes $A, A', B, \gamma, \lambda$ et λ' , il suppose que ces constantes varient d'un astre à l'autre *proportionnellement à la différence des moyens mouvements* m et m' , et il leur substitue alors deux constantes x et y , en posant :

$$\begin{array}{ll} A = (1 + m x) B, & A' = (1 + m' x) B \\ \lambda = \gamma - m y, & \lambda' = \gamma - m' y. \end{array}$$

Pour discuter l'expression (102) ou (A), relative à la pleine mer, LAPLACE désigne par T l'époque de la syzygie moyenne, et pose

$$t = T + y + t'';$$

et, en désignant par l et l' les quantités dont les arcs

$$nt + \varpi - mt - \lambda$$

et

$$nt + \varpi - m'l - \lambda'$$

surpassent, au moment de la pleine mer, un nombre entier de demi-circonférences, il trouve, en développant en série, suivant les puissances croissantes de

$$l, \quad l - (m' - m)l'', \quad \text{et} \quad (l + ml'')$$

pour l'expression de (A), considérée au moment de la pleine mer, mais en négligeant les produits des quatre dimensions de ces quantités, et les produits des troisièmes puissances de $l + ml''$ par $\sin^2 \varepsilon$ et par $\sin^2 \varepsilon'$, il trouve, dis-je,

$$(103) \text{ ou (B) } \left\{ \begin{array}{l} a(1 - 2l^2) + a' \{1 - 2[l - (m' - m)l'']^2\} \\ + b \{1 - 2(l + ml'')^2\} - 2h(l + ml'') \end{array} \right.$$

dans laquelle expression on a

$$a = \frac{AL}{r^3} \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon, \quad a' = \frac{A'L'}{r'^3} \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon'$$

$$b = \frac{1}{2} \frac{BL}{r^3} \sin^2 \varepsilon \sin 2mT + \frac{1}{2} \frac{BL'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \cos (2m'T - 2\delta)$$

et

$$h = \frac{1}{2} \frac{BL}{r^3} \sin^2 \varepsilon \cos 2mT + \frac{1}{2} \frac{BL'}{r'^3} \sin^2 \varepsilon' \sin (2m'T - 2\delta).$$

Pour obtenir la formule donnant l'heure de la *haute* ou de la *basse* mer, LAPLACE différentie cette fonction (B), par rapport au temps, et l'égalé à zéro.

Il fait remarquer qu'on ne doit faire varier que l et l'' . Dans cette différentiation, il suppose $m = m'$ (ce qui est un peu hasardé), et il admet que l'on peut supprimer les termes multipliés par $\sin^2 \varepsilon$ et par $\sin^2 \varepsilon'$ et aussi les termes en $\sin^4 \varepsilon$, $\sin^4 \varepsilon'$ ou en $\sin^2 \varepsilon \times \sin^2 \varepsilon'$.

Il fait en outre remarquer que, dans l'ensemble d'un grand nombre de syzygies, on peut supposer le terme

$$\frac{-2ha'(m'-m)l''}{a+a'+b}$$

comme alternativement *positif* et *négatif*, en sorte que la *somme* de ses diverses valeurs soit nulle ou, au moins, puisse être négligée. Il obtient enfin, pour l'*excès* considéré, au moment de la pleine mer,

$$(104) \quad a+a'-b - \frac{2a' \left(a + b \frac{m'+m}{m'-m} \right)}{a+a'+b} (m'-m) l''^2.$$

LAPLACE introduit, ensuite, dans l'expression de la hauteur de la mer, les *inégalités* du mouvement et de la distance des astres. Pour cela, il considère la fonction (b) et il cherche, relativement à la Lune, le développement du terme

$$(105) \quad \frac{3L'}{4r'^3} \sin^2 \theta \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon' \cos (2nt + 2\varpi - 2\varphi').$$

Il représente par

$$f \sin (st + \theta')$$

une des inégalités du mouvement lunaire, et par

$$h \cos (st + \theta')$$

l'inégalité correspondante du rayon vecteur r' de la Lune; il démontre alors que ces deux inégalités introduiront, avec l'expression (105), les termes

$$\frac{3L'}{4r'^3} \sin^2 \theta' \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon' \left\{ \begin{array}{l} \left(f - \frac{3h}{2} \right) \cos (2nt + 2\varpi - 2m't - st - \theta') \\ - \left(\frac{3}{2}h + f \right) \cos (2nt + 2\varpi - 2m't + st + \theta') \end{array} \right\}.$$

Ces termes, dit LAPLACE, donnent naissance à deux flux partiels que l'on peut considérer comme produits par l'action de deux astres fictifs, mus uniformément dans le plan de l'Équateur, à la distance r' , et dont les masses seraient, respectivement,

$$L' \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon' \left(f - \frac{3}{2} h \right)$$

et

$$L' \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon' \left(\frac{3}{2} h + f \right)$$

leurs moyens mouvements étant

$$m' + \frac{s}{2}$$

et

$$m' - \frac{s}{2}.$$

D'après ce qui a été dit précédemment, LAPLACE conclut, par une analyse assez délicate, qu'en tenant compte des inégalités dues au mouvement lunaire et au rayon vecteur, l'expression de l'excès de la haute mer est alors

$$(106) \left\{ \begin{array}{l} a + a' + b + 2a' \frac{\left[a + b \frac{(m' + m)}{m' - m} \right]}{a + a' + b} (m' - m) t''^2 \\ - \Sigma a' \cos(sT + \theta) \left\{ \begin{array}{l} 3h - \frac{fsx}{1+m'x} + \frac{6h \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varepsilon'}{1+m'x} \cos(2m'T - 2\delta) \\ - \frac{1}{2} \left[3h - \frac{fsx}{1+m'x} \right] (s^2 t''^2 + 4l'^2) \\ - 4 \left(f - \frac{3hsx}{4(1+m'x)} \right) s t'' l' \\ - \frac{3h \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varepsilon'}{1+m'x} \cos(2m'T - 2\delta) \left\{ \begin{array}{l} s^2 t''^2 + 4(l' - m't'')^2 \\ - 2sx(l' + m't'')st'' \end{array} \right\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le signe Σ embrasse tous les termes semblables relatifs aux diverses

inégalités de la Lune. LAPLACE fait immédiatement remarquer que cette expression (106) est de la forme

$$\alpha + 6 t''^2.$$

D'après ce que nous avons indiqué, l représente le *retard* de la marée sur l'heure du passage des astres, en conjonction, au méridien. En représentant par α la partie de l'expression de la hauteur des marées, indépendante de l et de t'' , LAPLACE trouve pour cette valeur de l

$$(107) \quad l = (m' - m) t'' \alpha' \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{mb}{(m' - m)a} \\ \Sigma \cos(sT + \theta') \left\{ \begin{array}{l} 3h - \frac{fsx}{1+m'x} - \frac{s}{m' - m} \left[f - \frac{3hsx}{4(1+m'x)} \right] \\ - 3h \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varepsilon' \cos(2m'T - 2\delta) \left\{ \begin{array}{l} 2mt'' \\ -\frac{1}{2} s x \cdot s t'' \end{array} \right\} \\ \frac{(1+m'x)(m' - m)t''}{\alpha + \frac{(m' - m)a}{n - m'} + \frac{m'b}{n - m}} \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Par la même analyse, dit LAPLACE, on trouverait les inégalités du mouvement solaire, dans les expressions de la hauteur et du retard des marées.

Il trouve encore qu'on aura égard à la *variation* lunaire, dans la valeur de α , en multipliant L' par 1,02734, dans les syzygies et par 0,97266 dans les quadratures.

En ce qui concerne cette valeur de α , LAPLACE montre que si l'on nomme P et Q les sommes des carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil aux instants des syzygies *équinoxiales*, et aux instants des syzygies *solsticiales*, P' et Q' ces mêmes sommes relativement à la Lune, on aura, en ne considérant que l'inégalité de la *variation*, pour un nombre i de syzygies équinoxiales

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} i 2i \alpha = 2A \frac{L}{r^3} P + 2A' \cdot 1,02734 \frac{L'}{r'^3} P' \\ -(A - B) \frac{L}{r^3} (P - Q) - (A' - B') \cdot 1,02734 \frac{L'}{r'^3} (P' - Q'). \end{array} \right.$$

et, pour le même nombre de syzygies solsticiales,

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 i \alpha' = 2 A \frac{L}{r^3} Q + 2 A'. 1,02734 \frac{L'}{r'^3} Q' \\ - (A - B) \frac{L}{r^3} (P - Q) - (A' - B). 1,02734 \frac{L'}{r'^3} (P' - Q'). \end{array} \right.$$

Il indique, en outre, que si l'on désigne par P_1 et Q_1 les sommes des carrés des cosinus des déclinaisons du Soleil dans les quadratures équinoxiales et solsticiales, et par P_1' et Q_1' la somme des carrés des cosinus des déclinaisons de la Lune dans ces mêmes quadratures, et si l'on désigne par α'' et par α''' ce que deviennent α et α' pour les quadratures, on aura, pour i quadratures *équinoxiales*,

$$(110) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 i \alpha'' = 2 A' 0,97266 \frac{L'}{r'^3} Q_1 - 2 A \frac{L}{r^3} P_1 \\ + (A' - B) 0,97266 \frac{L'}{r'^3} (P_1' - Q_1') + (A - B) \frac{L}{r^3} (P_1 - Q_1) \end{array} \right.$$

et pour i quadratures *solsticiales*,

$$(111) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 i \alpha''' = 2 A'. 0,97266 \frac{L'}{r'^3} P_1' - 2 A' \frac{L}{r^3} Q_1 \\ - (A - B). 0,97266 \frac{L'}{r'^3} (P_1' - Q_1') - (A - B) \frac{L}{r^3} (P_1 - Q_1) \end{array} \right.$$

LAPLACE indique, en terminant, quelles fonctions de P et Q ou de P' et Q' on devra prendre relativement aux i syzygies équinoxiales ou aux i syzygies solsticiales, et quelles fonctions de P_1 , Q_1 ou de P_1' et Q_1' on devra prendre, relativement aux i quadratures *équinoxiales* ou *solsticiales*, pour les quantités

$$\cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon, \quad \cos^4 \frac{1}{2} \varepsilon'$$

$$\sin^2 \varepsilon \cos 2mT, \quad \sin^2 \varepsilon' \cos (2m'T - 2\delta)$$

et

$$\operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \varepsilon' \cos (2m'T - 2\delta).$$

C'est à l'aide des relations (106), (107), (108), (109), (110) et (111) que LAPLACE effectue la comparaison de cette dernière analyse avec les observations des hauteurs de marées, dont la période est d'environ *un demi-jour*, et qui ont été enregistrées, *dans le port de Brest*, depuis l'année 1807 jusqu'à l'année 1822.

Edmond DUBOIS,

Examineur-hydrographe de la marine.
