

EMISSION DES ONDES INTERNES: UNE REVUE

Bruno VOISIN

*THOMSON-SINTRA ASM
1, avenue Aristide Briand, 94117 Arcueil Cedex*

RESUME

Les ondes internes de gravité constituent une composante omniprésente des mouvements océaniques méso-échelle, révélée notamment par l'observation spatiale de la surface. Il peut s'agir soit d'ondes aléatoires d'origine mal identifiée, soit d'ondes déterministes engendrées par la marée. De même les navires créent, lors de leur mouvement, un véritable sillage d'ondes internes.

Si la propagation des ondes internes est maintenant bien connue la théorie de leur émission demeure peu développée. Quoique de nombreuses études aient été consacrées à des types particuliers de sources d'ondes internes, il n'existe pas encore de méthode générale s'appliquant à toutes ces sources.

La présente communication a pour objet une synthèse bibliographique sur l'émission des ondes internes. Après un rappel de leurs principales propriétés les différents travaux traitant de leur émission sont récapitulés, pour des sources au repos (telle une zone de turbulence) ou en mouvement (tel un corps qui se déplace). Une théorie générale du rayonnement des ondes internes, récemment esquissée par certains chercheurs soviétiques et développée par l'auteur, est envisagée; elle repose sur la notion de fonction de Green.

ABSTRACT

Internal gravity waves form an omnipresent part of mesoscale oceanic motions; their occurrence is notably revealed by space views of the surface. They may either be random waves, whose origin is incompletely identified, or deterministic waves generated by surface tides. Similarly, moving ships create a truly internal wave wake.

The propagation of internal waves is now satisfactorily known. The theory of their generation remains, however, relatively undeveloped. Although numerous studies have dealt with particular sources of internal waves, no general theory is available which applies to all of them.

The present paper is devoted to a bibliographic review on internal wave radiation. First the main properties of these waves are recalled. Then previous work about their radiation is reviewed, for sources at rest (such as a turbulent zone) as well as moving sources (such as a moving body). A general theory of internal wave generation, recently sketched by some soviet researchers and developed by the author, is evoked; it relies upon Green's functions.

1. Introduction

Les ondes internes de gravité se propagent, sous l'effet de la pesanteur, dans les fluides stratifiés en densité. Dans l'océan leurs formes sont multiples (Garrett & Munk 1979, Levine 1983). Il peut s'agir d'ondes aléatoires, omniprésentes mais d'origine encore indéterminée, ou d'ondes déterministes engendrées par le flux et le reflux de la marée sur les reliefs sous-marins. Ces dernières ondes comportent elles-mêmes deux manifestations, appelées marées internes et ondes internes solitaires. Les marées internes sont linéaires et de même période que la marée de surface qui les engendre. Les ondes internes solitaires sont non linéaires et se présentent comme des trains d'onde, de période de l'ordre de la dizaine de minutes et d'une durée de une à deux heures, répétés à chaque cycle de marée; ce sont elles que l'on distingue sur les photos satellite de la surface de l'océan. Dans certaines mers où les ondes aléatoires sont absentes, apparaissent aussi des ondes internes de courte période et de nature transitoire (Brekhovskikh *et al.* 1975). Enfin les navires en mouvement au niveau de la thermocline créent un véritable sillage d'ondes internes, contrepartie en profondeur du sillage de vagues des bâtiments de surface.

Pendant longtemps les ondes internes n'ont été vues que comme un bruit venant perturber les mesures océanographiques et la détection sous-marine. Aujourd'hui elles apparaissent de plus en plus comme une composante essentielle des mouvements océaniques méso-échelle. Elles permettent aussi de songer à une nouvelle méthode de détection des navires en mouvement qui mettrait à profit leur sillage d'ondes internes.

La théorie de la propagation des ondes internes a atteint le même degré de sophistication que pour les ondes électromagnétiques ou acoustiques. La plupart des études des ondes internes dans l'océan ont pour objet l'analyse, à partir de cette théorie, des résultats expérimentaux (cf. Olbers 1983). En revanche la théorie de leur émission demeure peu développée, et a rarement été appliquée à l'interprétation d'expériences *in situ*. De ce fait les processus de génération des ondes internes dans l'océan restent de façon générale mal connus.

Plus précisément, les différentes approches théoriques de l'émission des ondes internes se rangent en deux catégories: théories au "coup par coup", qui permettent le calcul des ondes internes pour un problème donné, et théorie générale élaborée dans l'espace de Fourier par Lighthill (1978) à partir de ses travaux antérieurs (Lighthill 1960, 1965, 1967), essentiellement destinée à des sources monochromatiques et/ou en mouvement uniforme et à des perturbations initiales du milieu. La présente communication propose une synthèse bibliographique sur l'émission des ondes internes, et en présente une troisième approche reposant sur la méthode des fonctions de Green. Cette approche, mieux adaptée pour les sources dont la dépendance temporelle est arbitraire, construit le champ d'ondes internes dans l'espace et le temps réels; de plus amples détails à son propos peuvent être trouvés dans Voisin (1991 a).

Dans la suite de l'exposé seules sont considérées des ondes internes linéaires et vérifiant l'approximation de Boussinesq; le milieu est supposé infini, non tournant et uniformément stratifié, c'est-à-dire de fréquence de flottaison N constante. N est reliée au profil de densité statique $\rho_0(z)$ par $N^2 = -g\rho'_0(z)/\rho_0(z)$, où l'axe des z se confond avec la verticale ascendante. L'approximation d'une stratification uniforme rend l'étude de l'émission des ondes internes la plus simple possible. Dans l'océan, pour une fréquence $N(z)$ lentement variable, elle est valable au niveau de la zone d'émission; la propagation des ondes est seule affectée par les variations de la stratification et se traite par une approche de type WKB.

2. Propriétés des ondes internes

La théorie de la vitesse de groupe constitue le moyen le plus simple de mettre en évidence les principales propriétés des ondes internes (cf. Lighthill 1978 § 4.1 et 4.4 ou Brekhovskikh & Goncharov 1985 § 10.4). La relation de dispersion reliant la fréquence ω et le vecteur d'onde \mathbf{k} d'une onde interne plane monochromatique s'écrit

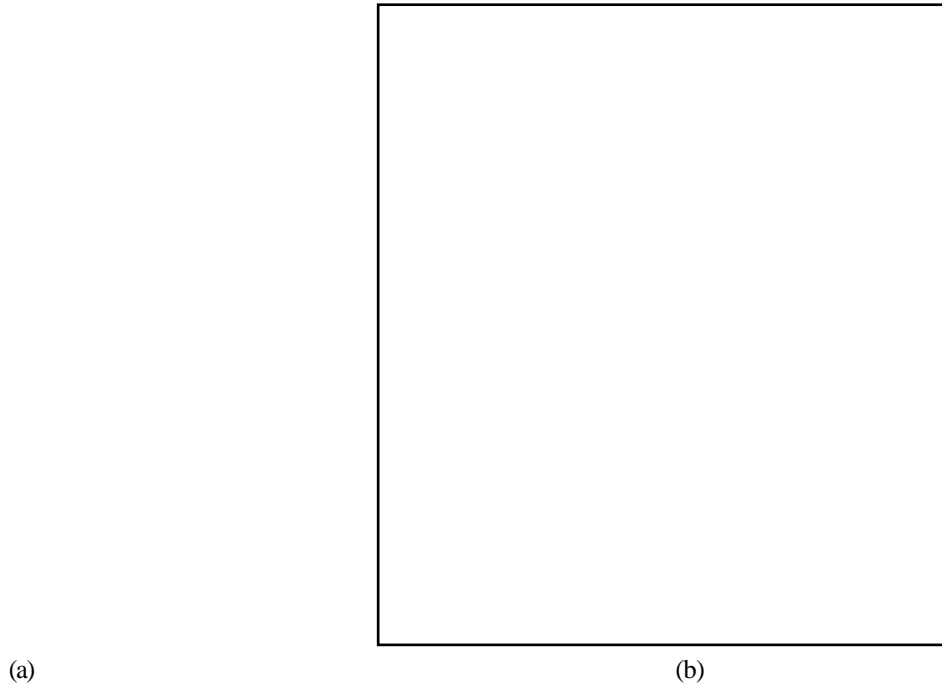


FIGURE 1. Ondes internes engendrées par des sources ponctuelles (a) monochromatique et (b) impulsive. (a) source oscille à la fréquence $\omega = N/2$ ($\theta_0 = 60^\circ$). (b) Les surfaces d'onde $\Phi = \pi/4 + n\pi$ sont représentées pour $Nt/2\pi = 5$.

$$\omega = N \frac{k_h}{k}, \quad (1)$$

où \mathbf{k}_h désigne la projection horizontale du vecteur d'onde. Elle montre que $\omega < N$, et pour ω donnée fixe l'inclinaison $\theta_0 = \arccos(\omega/N)$ des plans d'onde par rapport à la verticale tout en laissant la longueur d'onde λ arbitraire. Elle conduit pour la vitesse de groupe \mathbf{c}_g à

$$\mathbf{c}_g = \frac{N}{k} \frac{k_z}{k_h} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{e}_z \right), \quad (2)$$

et montre cette vitesse parallèle aux plans d'onde (\mathbf{e}_z est le vecteur unitaire de l'axe des z). Le mouvement du fluide se fait lui aussi le long de ces plans.

Pour une source monochromatique et ponctuelle il en résulte une localisation des ondes internes sur le cône, dit caractéristique, d'axe vertical et d'ouverture $\theta_0 = \arccos(\omega/N)$ (figure 1a). Les surfaces d'onde sont parallèles à ce cône et se déplacent perpendiculairement, mais disparaissent dès qu'elles l'ont quitté. Le mouvement du fluide est radial et dirigé le long du cône. Tout ceci a été confirmé par les expériences de Mowbray & Rarity (1967 a) et Kamachi & Honji (1988) pour un cylindre oscillant, et McLaren *et al.* (1973) pour une sphère oscillante.

Pour une source impulsive et ponctuelle le milieu se comporte comme un filtre résonnant, et dans chaque direction inclinée d'un angle θ avec la verticale ascendante sélectionne dans le spectre de la source la seule composante, de fréquence $N|\cos \theta|$, susceptible de se propager. A une position \mathbf{r} par rapport à la source et un temps t après l'impulsion sont reçues des ondes internes de vitesse de groupe $\mathbf{c}_g = \mathbf{r}/t$, et de fréquence et vecteur d'onde

$$\omega = N |\cos \theta| \quad \text{et} \quad \mathbf{k} = \frac{Nt}{r} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{e}_z \right) \text{sgn } z. \quad (3)$$

Les surfaces d'onde, correspondant à la phase $\Phi = Nt |\cos \theta|$, sont coniques (figure 1b) et se multiplient au cours du temps tout en se rapprochant de l'horizontale. Le mouvement du fluide

est radial. Les expériences de Stevenson (1973) pour un cylindre confirment ces résultats.

3. Sources d'ondes internes au repos

Les différentes sources d'ondes internes se scindent en deux groupes: sources au repos, dont le mouvement moyen est nul (les sources précédentes sont de ce type), et sources en mouvement. Dans un premier temps sont envisagées les sources au repos. Dans la suite de l'exposé seuls sont mentionnés, sauf lorsqu'il est question d'expériences, les travaux consacrés à des sources tridimensionnelles.

Les approches générales des sources au repos traitent soit de sources de masse, soit de perturbations initiales du milieu. Toutes sont asymptotiques et reposent sur des hypothèses de champ lointain ou grands temps. Lighthill (1978 § 4.10) et Chashechkin & Makarov (1984) ont de cette manière abordé les sources de masse, respectivement monochromatiques et transitoires. Lighthill (1978 § 4.8) et Sekerzh-Zen'kovich (1982) ont de même calculé les ondes engendrées par les perturbations initiales.

Néanmoins, la plupart des études des ondes internes émises par des sources au repos concernent non pas ces cas généraux mais celui de corps de forme donnée. Hendershott (1969) s'est intéressé aux oscillations d'une sphère et Grimshaw (1969) à son mouvement uniforme; tous deux ont considéré des mouvements démarrés impulsivement. Larsen (1969) a envisagé les oscillations libres d'une sphère déplacée de sa position d'équilibre, en focalisant cependant son attention sur les oscillations et non sur les ondes engendrées. Les travaux ultérieurs traitent tous d'ondes internes en régime monochromatique établi, dues aux oscillations d'une sphère (Appleby & Crighton 1987), d'un sphéroïde, considéré explicitement (Sarma & Krishna 1972 a) ou dans le cadre de l'approximation des corps aplatis (Krishna & Sarma 1969), ou d'un corps axisymétrique aplati quelconque (Rehm & Radt 1975).

Les expériences correspondantes sont peu nombreuses mais explorent un large éventail de sources, monochromatiques aussi bien que transitoires. Ainsi, pour les premières, Mowbray & Rarity (1967 a) et Kamachi & Honji (1988) ont étudié les oscillations forcées de cylindres et McLaren *et al.* (1973) celles de sphères. Pour les secondes Stevenson (1973) a envisagé le déplacement impulsif d'un cylindre, et Larsen (1969) et McLaren *et al.* (1973) les oscillations libres de sphères, respectivement rigides et fluides, déplacées de leur position d'équilibre puis relâchées.

L'exemple d'une sphère pulsante de rayon a , sur la surface de laquelle la vitesse radiale uniforme $U(t)$ est imposée, permet d'illustrer les résultats de ces travaux. Une synthèse à son sujet a été proposée par Voisin (1991 a, b). En régime monochromatique $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$, pour $0 < \omega < N$, les ondes internes sont confinées entre les deux cônes caractéristiques tangents à la sphère (figure 2a); là, celle-ci ne peut être considérée ponctuelle. Notamment, dans la zone III, la phase $\Phi = \omega t + (1/2) \arccos(\sigma_+/a)$ varie transversalement, en accord avec les expériences de McLaren *et al.* (1973). Il en va de même de la longueur d'onde $\lambda = 4\pi (a^2 - \sigma_+^2)^{1/2}$ et des vitesses de phase et de groupe $c_\phi = 2\omega (a^2 - \sigma_+^2)^{1/2}$ et $c_g = 2(N^2 - \omega^2)^{1/2} (a^2 - \sigma_+^2)^{1/2}$.

Dans l'océan les marées internes fournissent une confirmation de ces résultats théoriques. Elles résultent de la combinaison de la marée de surface, de fréquence ω , et du relief du fond, qui se comportent comme une source monochromatique située au niveau du talus continental (Baines 1982). Il a bien été vérifié expérimentalement et théoriquement que les marées internes sont confinées dans un faisceau émanant de cette source et d'inclinaison $\theta_0 = \arccos(\omega/N)$ avec la verticale (cf. Wunsch 1975).

En régime impulsif $U(t) = U_0 \delta(t)$ les ondes internes émises par une sphère pulsante se séparent pour $Nt \gg 1$ en deux composantes: les ondes de gravité de fréquence $N|\cos \theta|$ et les oscillations de flottaison de fréquence N . A l'extérieur du tore d'équation $r/a = Nt \sin \theta$ les

ondes de gravité sont dominantes et la sphère se comporte comme la source ponctuelle décrite au § 2 (figure 2b). Au niveau du tore les interférences dues à ses dimensions brouillent ces ondes, qui finissent à l'intérieur par s'effacer devant les oscillations de flottaison, auxquelles aucune énergie n'est associée. Cette structure étonnante du champ d'ondes internes est due aux variations spatiales et temporelles des fréquence et vecteur d'onde (3) des ondes de gravité. Ainsi, l'interprétation du rôle joué par le tore précédent est simple: il s'agit de la surface sur laquelle la longueur d'onde

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{Nt} \frac{r}{\sin \theta} \quad (4)$$

de ces ondes est constante et vérifie $ka = 1$.

4. Sources d'ondes internes en mouvement

La plupart des travaux consacrés à des sources d'ondes internes en mouvement traitent de sources ponctuelles, et reposent sur trois méthodes distinctes. La première, méthode intégrale, consiste à calculer les ondes internes dans l'espace de Fourier; mises sous forme intégrale, elles sont alors évaluées par les méthodes de phase stationnaire ou de plus grande descente. Pour une source en mouvement horizontal uniforme cette méthode a été mise en oeuvre par Crapper (1959) à distance finie de la trajectoire, et Wurtele (1957), Wu (1965) et Miles (1971) en champ lointain. Dans ce dernier cas seuls les résultats de Miles ne contiennent pas d'erreur; ils ont été retrouvés et complétés par Dokuchaev & Dolina (1977), Sturova (1978) et Janowitz (1984). Sturova (1974) a simultanément réalisé l'évaluation numérique de l'expression intégrale des ondes. Les autres types de mouvement ont tous été abordés en champ lointain: mouvement vertical uniforme par Warren (1960) et Grigor'ev & Dokuchaev (1970), mouvement horizontal uniforme d'une source oscillante par Rehm & Radt (1975), mouvement horizontal uniforme de durée finie par Chashechkin & Makarov (1984). Toujours en champ lointain Sturova (1980) s'est enfin intéressée au cas d'un mouvement quelconque.

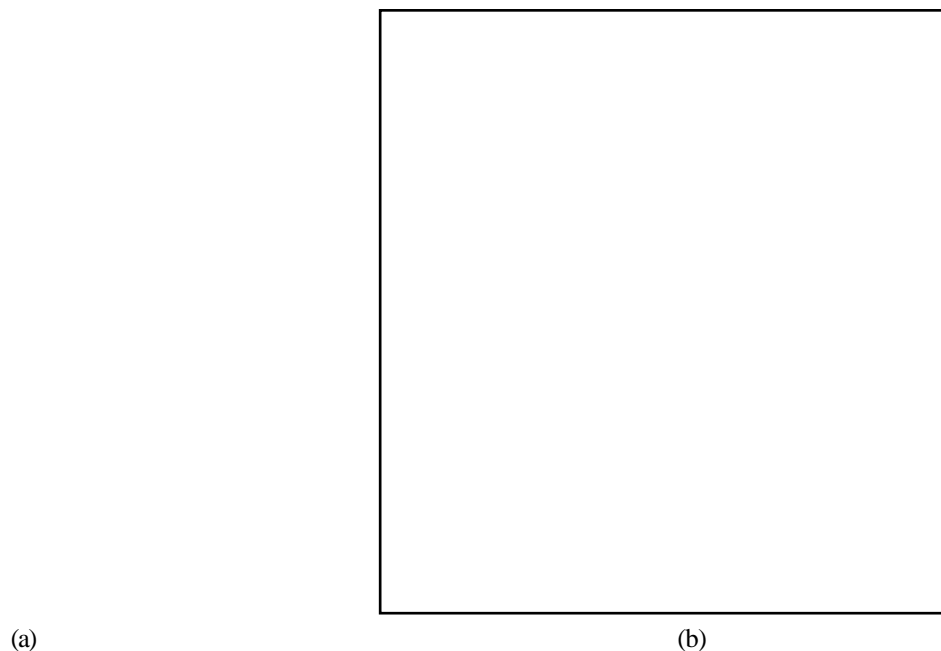


FIGURE 2. Ondes internes engendrées par une sphère accomplissant des pulsations (a) monochromatiques e impulsives. (a) Les ondes sont confinées dans les zones coniques III et V, où les coordonnées σ_{\pm} décrivent les distances transversales (cf. figure 1a). (b) A l'extérieur du tore de rayon Nta les ondes de gravité, de surfaces d'onde coniques, dominant (cf. figure 1b); sur le tore elles sont brouillées par interférences; à l'intérieur elles cèdent la place aux oscillations de flottaison, de phase constante.

La seconde méthode d'étude des ondes internes engendrées par les sources ponctuelles en mouvement s'appuie sur la méthode de Lighthill (1967, 1978 § 4.12). Il s'agit encore d'une évaluation des ondes en champ lointain par la méthode de la phase stationnaire, mais cette fois mise en oeuvre géométriquement par l'introduction de la surface des nombres d'onde et reliée à la théorie de la vitesse de groupe. De cette façon ont dans un premier temps été déterminées les surfaces d'onde pour différents mouvements uniformes: horizontal (Redekopp 1975, Rehm & Radt 1975, Peat & Stevenson 1975, Lighthill 1978 § 4.12), vertical (Mowbray & Rarity 1967 b, Lighthill 1978 § 4.12), incliné (Peat & Stevenson 1975), horizontal avec oscillations (Redekopp 1975, Rehm & Radt 1975, Peat & Stevenson 1975), vertical avec oscillations (Stevenson 1969). Par la suite Makarov & Chashechkin (1981, 1982) ont pour les mouvements horizontal et vertical uniformes effectué le calcul complet des ondes. Stevenson (1973) et Peat & Stevenson (1975) ont étendu cette méthode au tracé des surfaces d'onde accompagnant un mouvement quelconque, mais n'ont appliqué leurs résultats qu'aux sources bidimensionnelles.

Une troisième méthode d'étude des ondes internes émises par les sources ponctuelles en mouvement a pour objet le calcul exact des ondes dans certaines directions ainsi que celui de l'énergie rayonnée totale. Elle a été développée par Gorodtsov & Teodorovich (1980, 1981) pour un mouvement horizontal uniforme, Gorodtsov (1980) pour un mouvement vertical uniforme et Gorodtsov & Teodorovich (1983) pour divers mouvements périodiques.

L'émission des ondes internes par des sources étendues en mouvement n'a été abordée que pour des mouvements uniformes. Le cas d'une sphère en mouvement horizontal a été traité aux faibles vitesses par Grimshaw (1969) et Sarma & Krishna (1972 b); cependant seules sont obtenues les ondes transitoires dues au démarrage du mouvement. Aux fortes vitesses l'emploi d'une procédure différente, introduite par Gorodtsov & Teodorovich (1982), est nécessaire. Les corps de forme plus complexe ont tous été envisagés à partir de l'approximation des corps élancés ou aplatis, mise en oeuvre dans le cas général par Janowitz (1984) pour un mouvement horizontal et Warren (1960) pour un mouvement vertical. Crapper (1959, 1962) a considéré le mouvement horizontal de corps aplatis particuliers auxquels, lorsque leur rayon est grand devant la longueur d'onde, Blumen & McGregor (1976) et Smith (1980) ont appliqué l'approximation hydrostatique.

Plutôt que de prendre en compte explicitement la forme d'un corps en mouvement Gorodtsov & Teodorovich (1980), Gorodtsov (1980) et Makarov & Chashechkin (1981, 1982) ont enfin préféré, pour des mouvements horizontal et vertical, avoir recours à des sources de masse à délocalisation spatiale gaussienne.

Les expériences sur l'émission des ondes internes par les corps en mouvement ont principalement mis en jeu des cylindres et des sphères, et ont pour la plupart été consacrées à des mouvements uniformes: mouvement horizontal d'un cylindre (Belotserkovskii *et al.* 1984, Aksenov *et al.* 1989) et d'une sphère (Peat & Stevenson 1975, Makarov & Chashechkin 1981, 1982, Chashechkin 1989, Hopfinger *et al.* 1991), mouvement vertical d'un cylindre (Gärtner 1983) et d'une sphère (Mowbray & Rarity 1967 b), mouvement incliné d'un cylindre non oscillant (Stevenson 1968) ou oscillant (Stevenson & Thomas 1969), mouvement horizontal (Peat & Stevenson 1975) et vertical (Stevenson 1969) d'une sphère oscillante. Seuls Stevenson (1973) et Peat & Stevenson (1975) ont étudié divers mouvements accélérés, pour un cylindre. C'est à propos du mouvement horizontal uniforme que d'autres corps ont été envisagés: ellipsoïde élancé (Gilreath & Brandt 1985), barrière horizontale de profil triangulaire et largeur finie (Castro *et al.* 1983, Castro 1987), corps bidimensionnels de formes variées (Baines & Hoinka 1985).

Des simulations numériques de l'écoulement stratifié autour de différents obstacles ont par ailleurs été faites, dont certaines ont abordé la question des ondes internes. Elles sont dues à Hanazaki (1988) pour une sphère, Smolarkiewicz & Rotunno (1989) pour un obstacle aplati en forme de cloche et Sharman & Wurtele (1983) pour un parallélépipède aplati.

Pour illustrer les résultats de ces investigations on considérera le cas dont l'importance pratique est la plus grande, celui d'une source ponctuelle en mouvement horizontal uniforme, au sujet duquel Voisin (1991 a) a proposé une synthèse. Les ondes internes sont confinées en aval de la source. Leur trait essentiel est la forme des surfaces d'onde. Dans un système de coordonnées où $\mathbf{r}_1 = (x_1, y, z)$ est la position par rapport à la source (x_1 désignant les distances longitudinales comptées le long de la trajectoire, y les distances latérales et z les distances verticales) et $r_\perp = (y^2 + z^2)^{1/2}$ est la distance à la trajectoire, ces surfaces sont dans un plan horizontal $z = \text{cte}$ hyperboliques et d'équation

$$\frac{x_*^2}{\Phi^2 - z_*^2} - \frac{y_*^2}{z_*^2} = 1, \quad (5)$$

où $\mathbf{r}_* = N\mathbf{r}_1/U$, et dans le plan vertical $y = 0$ circulaires et d'équation $x_*^2 + z_*^2 = \Phi^2$. Les expériences de Hopfinger *et al.* (1991) dans le plan horizontal et celles de Peat & Stevenson (1975), Makarov & Chashechkin (1981, 1982) et Chashechkin (1989) dans le plan vertical confirment ces lois théoriques. Elles mettent aussi en évidence qu'au voisinage de la trajectoire, où s'annule la longueur d'onde

$$\lambda = 2\pi \frac{U}{N} \frac{r_\perp^2}{\sqrt{x_1^2 y^2 + r_\perp^4}}, \quad (6)$$

le modèle d'une source ponctuelle n'est plus valable.

5. Application aux ondes internes de la méthode des fonctions de Green

L'élaboration d'une théorie de l'émission des ondes internes par la méthode des fonctions de Green a été esquissée par Miropol'skii (1978) et Sekerzh-Zen'kovici. Ceux-ci ont montré que les ondes engendrées par la source de masse $m(\mathbf{r}, t)$ perturbations initiales

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \psi|_{t=0} \quad \text{et} \quad \psi_1(\mathbf{r}) = \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} \quad (7)$$

s'expriment en termes de la fonction de Green $G(\mathbf{r}, t)$, définie par

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta + N^2 \Delta_h \right) G(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}) \delta(t) \quad \text{et} \quad G(\mathbf{r}, t)|_{t < 0} = 0, \quad (8)$$

où Δ désigne le laplacien et Δ_h le laplacien horizontal, sous la forme

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & \int_0^t d\tau \int d^3 r' m(\mathbf{r}', \tau) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \tau) \\ & + \int d^3 r' \left[\Delta' \psi_1(\mathbf{r}') G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) + \Delta' \psi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Le potentiel interne ψ est un potentiel caractéristique des ondes internes, auquel le déplacement vertical ζ est relié par $\zeta = \partial^2 \psi / \partial z \partial t$.

Trois séries de travaux ont dans la littérature été consacrés à la fonction de Green elle-

même. Les premiers ont pour objet le calcul, dans l'espace de Fourier, de la fonction de Green monochromatique. Ils sont dus, sans l'approximation de Boussinesq à Sarma & Naidu (1972 a, b), Ramachandra Rao (1973, 1975) et Tolstoy (1973 § 7.3), et dans l'approximation de Boussinesq à Rehm & Radt (1975) ainsi que Miles (1971), Sturova (1980) et Gorodtsov & Teodorovich (1980, 1983). Certains de ces résultats sont contradictoires, du fait de l'emploi de conditions de rayonnement erronées; ce point a été discuté par Voisin (1991 b).

Une seconde série de travaux ont été consacrés au calcul direct de la fonction de Green impulsive $G(\mathbf{r}, t)$. Miropol'skii (1978) a pour ce faire eu recours à la théorie des fonctions et Sekerzh-Zen'kovich (1979) à celle des distributions, seconde approche que Teodorovich & Gorodtsov (1980) ont montrée être la seule valable. Zavol'skii & Zaitsev (1984) ont par la suite réalisé une étude détaillée de la validité du développement asymptotique de la fonction de Green proposé par Sekerzh-Zen'kovich (1979), développement qui n'est en fait que le premier ordre d'un développement plus complet donné par Dickinson (1969) comme cas particulier de la fonction de Green des ondes acousto-gravitationnelles, résultant du couplage des ondes internes avec les ondes acoustiques.

Plus généralement, une troisième série de travaux ont traité de la fonction de Green des ondes acousto-gravitationnelles; dans la limite incompressible et moyennant l'approximation de Boussinesq ils deviennent applicables aux ondes internes. Par des méthodes différentes Pierce (1963), Moore & Spiegel (1964) et Grigor'ev & Dokuchaev (1970) sont arrivés à une même expression de la fonction de Green monochromatique. Après que Kato (1966 a) eut vérifié l'équivalence des deux premières dérivations Kato (1966 b) et Cole & Greifinger (1969) ont analysé la structure de la fonction de Green impulsive. Dickinson (1969) et Liu & Yeh (1971) en ont ensuite proposé des développements asymptotiques tandis que Row (1967) en décrivait une approximation hydrostatique.

Les résultats de ces investigations ont été synthétisés par Voisin (1991 a, b). Il en découle pour la fonction de Green le développement asymptotique, valable pour $Nt \gg 1$,

$$G(\mathbf{r}, t) \sim -\frac{1}{(2\pi)^{3/2} N r \sin \theta} \left[\frac{\cos(Nt |\cos \theta| - \pi/4)}{\sqrt{Nt |\cos \theta|}} + \frac{\sin(Nt - \pi/4)}{\sqrt{Nt}} \right], \quad (10)$$

qui met en évidence la séparation des ondes de gravité et des oscillations de flottaison. A partir de ce résultat, et de (9), le développement de la méthode des fonctions de Green a été effectué par Voisin (1991 a). En sont résumées ici les principales conclusions.

Pour une source de masse au repos $m(\mathbf{r}, t)$ cette méthode ne s'avère intéressante que pour une source transitoire de durée Θ ; dans le cas antagoniste d'une source monochromatique la théorie de Lighthill (1978 § 4.10) est mieux adaptée. L'interprétation des résultats obtenus montre que la structure du champ d'ondes internes mise en évidence sur l'exemple de la sphère pulsante, en particulier les zones de prédominance des ondes de gravité et des oscillations de flottaison, s'applique aux sources transitoires d'ondes internes d'une façon générale.

C'est pour les sources en mouvement que la méthode des fonctions de Green s'avère la plus puissante. Elle permet le traitement d'un mouvement quelconque, ce qui n'avait jamais été réalisé auparavant. Son développement repose sur la notion de temps retardé, instant auquel la source a émis l'impulsion élémentaire reçue au point \mathbf{r} à l'instant t . Pour une source de masse $m[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t), t]$, non oscillante, de rayon a et se déplaçant sur la trajectoire $\mathbf{r}_0(t)$, l'évaluation du premier terme de la superposition (9) de fonctions de Green fait apparaître le temps retardé de façon naturelle, comme la solution τ_s de l'équation implicite

$$t - \tau_s = \frac{R(\tau_s)}{\mathbf{v}_0(\tau_s) \cdot \left[\frac{\mathbf{R}(\tau_s)}{R(\tau_s)} - \frac{R(\tau_s)}{Z(\tau_s)} \mathbf{e}_z \right]}, \quad (11)$$

qui spécifie qu'entre leur émission et leur réception les ondes internes se sont propagées à la vitesse de groupe $\mathbf{c}_g = \mathbf{R}(\tau_s)/(t - \tau_s)$. $\mathbf{v}_0(\tau) = d\mathbf{r}_0/d\tau$ et $\boldsymbol{\gamma}_0(\tau) = d^2\mathbf{r}_0/d\tau^2$ sont respectivement la vitesse et l'accélération de la source; $\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)$.

Simultanément est obtenue l'expression des ondes internes pour $Nt \gg 1$, $R \gg \lambda$ et $R \gg a$, sous la forme

$$\zeta(\mathbf{r}, t) \sim \frac{\text{sgn } Z}{2\pi c_g} \frac{R_h}{R^2} \text{Re} \left\{ \frac{m(\mathbf{k}, \tau_s)}{\sqrt{|A|}} e^{i \left[\frac{N}{c_g} |Z| - \frac{\pi}{2} H(-A) \right]} \right\}, \quad (12)$$

où

$$A = R \frac{\boldsymbol{\gamma}_0}{c_g^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{R}{Z} \mathbf{e}_z \right) - \left(\frac{\mathbf{v}_0}{c_g} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right)^2 + 2 \frac{R}{Z} \frac{\mathbf{v}_0}{c_g} \cdot \mathbf{e}_z, \quad (13)$$

et

$$m(\mathbf{k}, t) = \int m(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 r, \quad (14)$$

ainsi que leurs caractéristiques, telles la fréquence et le vecteur d'onde

$$\omega = N \frac{|Z|}{R} \quad \text{et} \quad \mathbf{k} = \frac{N}{c_g} \frac{\mathbf{R}}{R} \times \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{e}_z \right) \text{sgn } Z = \frac{\omega}{c_g} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{R}{Z} \mathbf{e}_z \right). \quad (15)$$

Dans ces formules $\mathbf{R}(\tau)$ est implicitement pris au temps retardé τ_s et $H(x)$ désigne l'échelon de Heaviside ($H(x) = 1$ pour $x > 0$, 0 pour $x < 0$). Aussi les ondes internes engendrées par une source en mouvement possèdent-elles la même structure que les ondes de gravité engendrées par une source impulsive, décrites par (3), au remplacement près de \mathbf{r} et t par $\mathbf{R}(\tau_s)$ et $t - \tau_s$.

6. Conclusion

Il ressort de ce bref panorama que deux théories générales apportent des points de vue complémentaires sur l'émission des ondes internes. La première, théorie de Lighthill (1978), construit les ondes dans l'espace de Fourier; elle est destinée aux sources monochromatiques éventuellement en mouvement uniforme, ainsi qu'aux perturbations initiales du milieu. La seconde s'appuie sur la méthode des fonctions de Green et construit les ondes dans l'espace et le temps réels; elle est destinée aux sources de nature transitoire, et s'avère particulièrement bien adaptée au cas des sources en mouvement quelconque. Toutes deux présentent l'avantage sur les théories plus classiques de l'émission des ondes internes qu'elles permettent l'analyse de la propagation de ces ondes en même temps que leur calcul.

REFERENCES

- Aksenov A.V., Mozhaev V.V., Skorovarov V.E. & Sheronov A.A. 1989 *Fluid Dyn.* **24**, 639-642
 Appleby J.C. & Crighton D.G. 1987 *J. Fluid Mech.* **183**, 439-450
 Baines P.G. 1982 *Deep Sea Res.* **A 29**, 307-338
 Baines P.G. & Hoinka K.P. 1985 *J. Atmos. Sci.* **42**, 1614-1630
 Belotserkovskii O.M., Belotserkovskii S.O., Gushchin V.A., Morozov E.N., Onufriev A.T. & Ul'yanov S.A. 1984 *Sov. Phys. Dokl.* **29**, 884-886

- Blumen W. & McGregor C.D. 1976 *Tellus* **28**, 287-298
- Brekhovskikh L.M. & Goncharov V.P. 1985 *Mechanics of Continua and Wave Dynamics*. Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg)
- Brekhovskikh L.M., Konjaev K.V., Sabinin K.D. & Serikov A.N. 1975 *J. Geophys. Res.* **80**, 856-864
- Castro I.P. 1987 *Tellus A* **39**, 72-81
- Castro I.P., Snyder W.H. & Marsh G.L. 1983 *J. Fluid Mech.* **135**, 261-282
- Chashechkin Yu.D. 1989 *Fluid Dyn.* **24**, 1-7
- Chashechkin Yu.D. & Makarov S.A. 1984 *Dokl. Earth Sci. Sect.* **276**, 210-213
- Cole J.D. & Greifinger C. 1969 *J. Geophys. Res.* **74**, 3693-3703
- Crapper G.D. 1959 *J. Fluid Mech.* **6**, 51-76
- Crapper G.D. 1962 *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **254**, 601-623
- Dickinson R.E. 1969 *Rev. Geophys.* **7**, 483-514
- Dokuchaev V.P. & Dolina I.S. 1977 *Izv. Atmos. Oceanic Phys.* **13**, 444-449
- Garrett C. & Munk W. 1979 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **11**, 339-369
- Gärtner U. 1983 *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **26**, 139-145
- Gilreath H.E. & Brandt A. 1985 *AIAA J.* **23**, 693-700
- Gorodtsov V.A. 1980 *J. Engng Phys.* **39**, 1062-1065
- Gorodtsov V.A. & Teodorovich E.V. 1980 *Izv. Atmos. Oceanic Phys.* **16**, 699-704
- Gorodtsov V.A. & Teodorovich E.V. 1981 *Fluid Dyn.* **16**, 219-224
- Gorodtsov V.A. & Teodorovich E.V. 1982 *Fluid Dyn.* **17**, 893-898
- Gorodtsov V.A. & Teodorovich E.V. 1983 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **24**, 521-526
- Grigor'ev G.I. & Dokuchaev V.P. 1970 *Izv. Atmos. Oceanic Phys.* **6**, 398-402
- Grimshaw R.H.J. 1969 *Mathematika* **16**, 231-248
- Hanazaki H. 1988 *J. Fluid Mech.* **192**, 393-419
- Hendershott M.C. 1969 *J. Fluid Mech.* **36**, 513-527
- Hopfinger E.J., Flor J.-B., Chomaz J.-M. & Bonneton P. 1991 *Exp. Fluids* (sous presse)
- Janowitz G.S. 1984 *J. Fluid Mech.* **148**, 97-108
- Kamachi M. & Honji H. 1988 *Fluid Dyn. Res.* **2**, 229-241
- Kato S. 1966 a *Astrophys. J.* **143**, 893-903
- Kato S. 1966 b *Astrophys. J.* **144**, 326-336
- Krishna D.V. & Sarma L.V.K.V. 1969 *J. Fluid Mech.* **38**, 833-842
- Larsen L.H. 1969 *Deep Sea Res.* **16**, 587-603
- Levine M.D. 1983 *Rev. Geophys. Space Phys.* **21**, 1206-1216
- Lighthill M.J. 1960 *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **252**, 397-430
- Lighthill M.J. 1965 *J. Inst. Maths Applies* **1**, 1-28
- Lighthill M.J. 1967 *J. Fluid Mech.* **27**, 725-752
- Lighthill M.J. 1978 *Waves in Fluids*. Cambridge University Press (Cambridge)
- Liu C.H. & Yeh K.C. 1971 *Tellus* **23**, 150-163
- Makarov S.A. & Chashechkin Yu.D. 1981 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **22**, 772-779
- Makarov S.A. & Chashechkin Yu.D. 1982 *Izv. Atmos. Oceanic Phys.* **18**, 758-764
- McLaren T.I., Pierce A.D., Fohl T. & Murphy B.L. 1973 *J. Fluid Mech.* **57**, 229-240

- Miles J.W. 1971 *Geophys. Fluid Dyn.* **2**, 63-87
- Miropol'skii Yu.Z. 1978 *Izv. Atmos. Oceanic Phys.* **14**, 673-679
- Moore D.W. & Spiegel E.A. 1964 *Astrophys. J.* **139**, 48-71
- Mowbray D.E. & Rarity B.S.H. 1967 a *J. Fluid Mech.* **28**, 1-16
- Mowbray D.E. & Rarity B.S.H. 1967 b *J. Fluid Mech.* **30**, 489-495
- Olbers D.J. 1983 *Rev. Geophys. Space Phys.* **21**, 1567-1606
- Peat K.S. & Stevenson T.N. 1975 *J. Fluid Mech.* **70**, 673-688
- Pierce A.D. 1963 *J. Acoust. Soc. Am.* **35**, 1798-1807
- Ramachandra Rao A. 1973 *J. Fluid Mech.* **58**, 161-164
- Ramachandra Rao A. 1975 *J. Fluid Mech.* **72**, 353-362
- Redekopp L.G. 1975 *Geophys. Fluid Dyn.* **6**, 289-313
- Rehm R.G. & Radt H.S. 1975 *J. Fluid Mech.* **68**, 235-258
- Row R.V. 1967 *J. Geophys. Res.* **72**, 1599-1610
- Sarma L.V.K.V. & Krishna D.V. 1972 a *Zastosow. Matem.* **13**, 109-121
- Sarma L.V.K.V. & Krishna D.V. 1972 b *Zastosow. Matem.* **13**, 123-130
- Sarma L.V.K.V. & Naidu K.B. 1972 a *Acta Mechanica* **13**, 21-29
- Sarma L.V.K.V. & Naidu K.B. 1972 b *Pure Appl. Geophys.* **99**, 156-168
- Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. 1979 *Sov. Phys. Dokl.* **24**, 347-349
- Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. 1982 *Appl. Maths Mech.* **46**, 758-764
- Sharman R.D. & Wurtele M.G. 1983 *J. Atmos. Sci.* **40**, 396-427
- Smith R.B. 1980 *Tellus* **32**, 348-364
- Smolarkiewicz P.K. & Rotunno R. 1989 *J. Atmos. Sci.* **46**, 1154-1164
- Stevenson T.N. 1968 *J. Fluid Mech.* **33**, 715-720
- Stevenson T.N. 1969 *J. Fluid Mech.* **35**, 219-22
- Stevenson T.N. 1973 *J. Fluid Mech.* **60**, 759-767
- Stevenson T.N. & Thomas N.H. 1969 *J. Fluid Mech.* **36**, 505-511
- Sturova I.V. 1974 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **15**, 796-805
- Sturova I.V. 1978 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **19**, 330-336
- Sturova I.V. 1980 *Fluid Dyn.* **15**, 378-383
- Teodorovich E.V. & Gorodtsov V.A. 1980 *Izv. Atmos. Oceanic Phys.* **16**, 551-553
- Tolstoy I. 1973 *Wave Propagation*. McGraw-Hill (New York)
- Voisin B. 1991 a *Rayonnement des Ondes Internes de Gravité. Application aux Corps en Mouvement*. Thèse de doctorat de l'université Paris 6
- Voisin B. 1991 b *J. Fluid Mech.* (sous presse)
- Warren F.W.G. 1960 *J. Fluid Mech.* **7**, 209-229
- Wu T.Y.-T. 1965 *Z. Angew. Math. Mech. Sond.* **45**, T194-T195
- Wunsch C. 1975 *Rev. Geophys. Space Phys.* **13**, 167-182
- Wurtele M.G. 1957 *Beitr. Phys. Atmos.* **29**, 242-252
- Zavol'skii N.A. & Zaitsev A.A. 1984 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **25**, 862-867