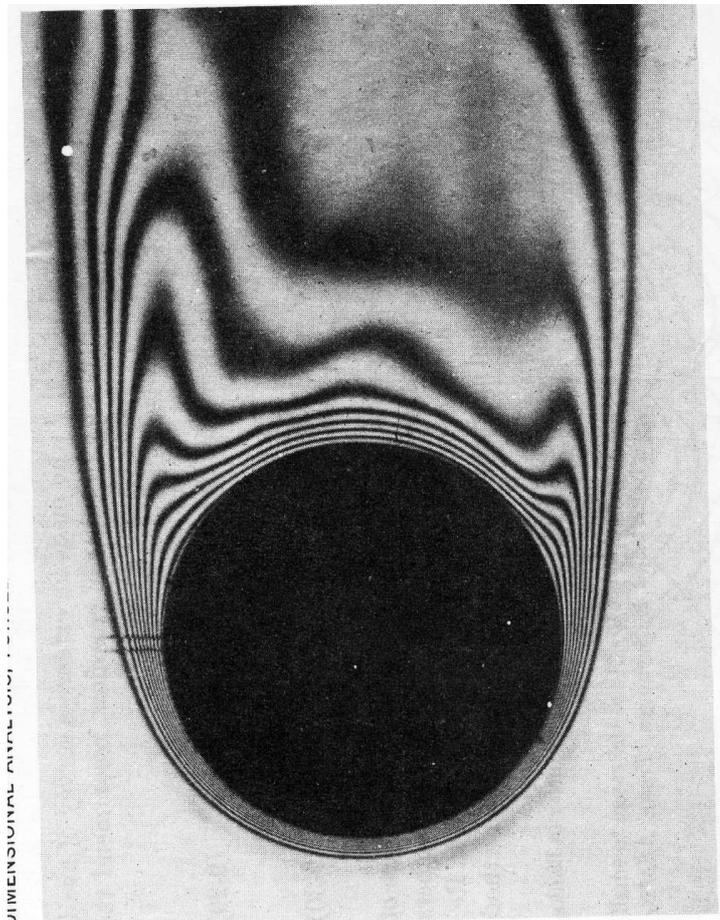


# TRANSFERTS THERMIQUES CONVECTIFS

Master 2 GdP

Ph. Marty  
2012-13



Isothermes autour d'un cylindre chauffé  
en présence d'un écoulement d'air à  $Re = 1260$   
Ref.: Eckert and Drake.

GÉNIE DES PROCÉDÉS  
Master 2  
Université Joseph Fourier, Grenoble

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Convection forcée interne</b>	<b>6</b>
2.1	Convection forcée laminaire en conduite circulaire chauffée à flux constant . . . . .	6
2.2	Convection forcée laminaire dans des conduites de section quelconque . . . . .	8
2.3	Convection forcée turbulente dans un tube quelconque . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Convection forcée externe</b>	<b>10</b>
3.1	Convection forcée laminaire sur plaque plane . . . . .	10
3.1.1	Rappel sur les couches limites hydrodynamique et thermique . . . . .	10
3.1.2	Echanges thermiques sur plaque plane pour $Pr \ll 1$ . . . . .	11
3.1.3	Echanges thermiques sur plaque plane pour $Pr \gg 1$ . . . . .	12
3.1.4	Expressions exactes - Flux total échangé (en laminaire) . . . . .	14
3.2	Convection forcée turbulente sur plaque plane . . . . .	14
3.3	Ecoulements forcés autour d'obstacles . . . . .	14
3.3.1	Obstacles cylindriques . . . . .	14
3.3.2	Obstacles non circulaires . . . . .	17
3.3.3	Obstacle sphérique . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Convection naturelle</b>	<b>20</b>
4.1	Introduction . . . . .	20
4.2	Convection naturelle sur plaque plane verticale chauffée à flux constant . . . . .	22
4.3	Convection naturelle entre plaques verticales parallèles (cheminée) . . . . .	23
4.3.1	Condition d'existence de ce régime . . . . .	23
4.3.2	Equations du régime établi . . . . .	23
4.3.3	Cas de deux plaques de même température . . . . .	23
4.4	Autres géométries . . . . .	24
4.4.1	Paroi plane inclinée par rapport à la verticale . . . . .	24
4.4.2	Cylindre vertical . . . . .	24
4.4.3	Cylindre horizontal . . . . .	25
4.4.4	Sphère . . . . .	25
4.4.5	Plaques horizontales . . . . .	25

## Nomenclature

$T$	température ( $K$ )
$R$	résistance thermique ( $K.W^{-1}$ )
$C$	Chaleur massique ( $J.Kg^{-1}.K^{-1}$ )
$q$	sources de chaleur volumiques ( $W.m^{-3}$ )
$Q$	chaleur, energie ( $J$ )
$h$	coefficient d'échange convectif ( $W.m^{-2}$ )
$g$	gravité ( $m.s^{-2}$ )
$P$	pression ( $Pa$ )
$t$	temps ( $s$ )
$\vec{V}$	vitesse du fluide ( $m/s$ )
$Nu$	Nombre de Nusselt
$Gr$	Nombre de Grashof
$Ra$	Nombre de Rayleigh
$Pr$	Nombre de Prandtl
$Pe$	Nombre de Péclet
$Ri$	Nombre de Richardson
$\vec{\varphi}$	densité de flux de chaleur ( $W.m^{-2}$ )
$\Phi$	Flux de chaleur ( $W$ )
$\lambda$	conductivité thermique ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )
$\nabla^2 = \Delta$	opérateur laplacien
$\rho$	masse volumique ( $kg.m^{-3}$ )
$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C}$	diffusivité thermique ( $m^2.s^{-1}$ )
$\beta$	dilatabilité volumique ( $K^{-1}$ )

# Chapter 1

## Introduction

L'objet de chapitre est de rappeler comment l'écriture sous forme adimensionnelle de l'équation de transport de la chaleur fait apparatre les nombres sans dimensions caractéristiques de la convection dans les fluides. On y ra pelle aussi ce qui caractérise les différents régimes de convection : forcée, naturelle et mixte. Ce chapitre se termine par la liste des principaux nombres sans dimension utiles en convection thermique.

Lorsque le champ de vitesse est imposé, le champ de température est totalement dépendant de celui-ci. Cette situation est celle de la convection forcée dans laquelle la vitesse est donc insensible aux variations de température dans le fluide. La température  $T$  obéit alors à une équation de transport:

$$\rho C_P \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + \Phi_S$$

où:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T$$

Le dernier terme représente un éventuel terme source pouvant résulter d'une réaction chimique, de l'effet Joule si le fluide est métallique ou de la contribution des forces visqueuses si l'écoulement est supersonique ( $\Phi_S$  est en  $W.m^{-3}$ ).

Lorsque le champ de vitesse est crée par le champ de température, on dit que la convection est naturelle, et la vitesse obéit à:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{V} - \rho g \beta (T - T_{ref}) \vec{g}$$

où le dernier terme représente la poussée d'Archmède par unité de volume fluide.

### Ecriture adimensionnelle des équations

- En convection forcée:

Si la distribution de vitesse n'est pas connue, on peut la chercher par résolution des équations de Navier-Stokes. En choisissant les variables adimensionnelles suivantes:

$$T^+ = \frac{T - T_{ref}}{\Delta T}; U^+ = \frac{U}{U_{ref}}; x^+ = \frac{x}{L_{ref}}; p^+ = \frac{p}{\rho U_{ref}^2}; t^+ = \frac{t}{L_{ref}/U_{ref}}$$

l'équation de la vitesse devient:

$$\frac{DV^+}{Dt^+} = -\nabla p^+ + \frac{1}{Re} \nabla^2 V^+$$

où le nombre de Reynolds est tel que  $Re = \frac{U_{ref} L_{ref}}{\nu}$ .

La solution obtenue peut ensuite être introduite dans l'équation de  $T$  qui, en écriture adimensionnelle, devient:

$$\frac{\rho C_P \Delta T}{L_{ref}/U_{ref}} \cdot \frac{DT^+}{Dt^+} = \frac{\lambda \Delta T}{L_{ref}^2} \nabla^2 T^+ + \Phi_S^+$$

soit encore:

$$\frac{DT^+}{Dt^+} = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T^+ + \Phi_S^+$$

où  $Pe$  désigne le nombre de Péclet:  $Pe = \frac{U_{ref} L_{ref}}{\alpha}$  avec  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_P}$  diffusivité thermique du fluide. Le terme  $\Phi_S^+$  est tel que  $\Phi_S^+ = \frac{\Phi_S L_{ref}}{U_{ref} \Delta T \rho C_P}$ .

- En convection naturelle:

L'utilisation des mêmes grandeurs adimensionnelles transforme l'équation de Navier-Stokes ainsi:

$$\frac{DV^{\vec{+}}}{Dt^+} = -\nabla \vec{p}^+ + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}^+ + \frac{g\beta\Delta T L}{U_{ref}^2} T^+$$

Il reste toutefois à déterminer  $U_{ref}$  qui n'est pas imposée par un mécanisme externe mais par la convection naturelle elle-même.

Si l'écoulement est rapide ( $Re, Gr \gg 1$ ), on peut postuler un équilibre entre les forces d'inertie et la poussée d'Archimède soit:

$$\frac{\rho U^2}{L_{ref}} \approx \rho g \beta \Delta T \rightarrow U_{ref} = \sqrt{g \beta \Delta T L_{ref}}$$

de sorte que Navier-Stokes devient:

$$\frac{DU^{\vec{+}}}{Dt^+} = -\nabla \vec{p}^+ + \frac{1}{Gr^{1/2}} \nabla^2 U^{\vec{+}} - T^+ \vec{g}$$

où le nombre de Grashof est défini par:  $Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$ .  
L'équation de la température devient alors:

$$\frac{DT^+}{Dt^+} = \frac{1}{Gr^{1/2} Pr} \nabla^2 T^+ + \Phi_S^+$$

où le nombre de Prandtl est défini par  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ .

Si l'écoulement est lent (faible Grashof et Reynolds), un choix judicieux de l'échelle de vitesse consiste à équilibrer les forces visqueuses et d'Archimède ce qui donne  $\mu \frac{U}{L^2} \approx \rho g \beta \Delta T$ . L'échelle de vitesse est alors:

$$U_{ref} = \frac{g\beta\Delta T L^2}{\nu}$$

- Convection mixte:

Lorsque de la convection naturelle se superpose à de la convection forcée, la question se pose de savoir si un des deux champs de vitesse peut être négligé ou si les deux doivent être pris en considération.

On peut par exemple estimer le rapport des deux vitesses attendues pour chacun des modes de convection pris isolément, soit  $\sqrt{g\beta\Delta T L_{ref}}$  pour la convection naturelle et  $U_0$  pour la convection forcée. On forme ainsi le nombre de Richardson:

$$Ri = \frac{g\beta\Delta T L_{ref}}{U_0^2}$$

Si  $Ri \gg 1$ , alors la convection naturelle domine alors que si  $Ri \ll 1$ , c'est la convection forcée qui prévaut.

- Le nombre d'Eckert: pour un écoulement de gaz à grande vitesse (nombre de Mach  $> 0.3$ ), la puissance des forces visqueuses génère de la chaleur, ce qui se traduit par un terme source dans l'équation de  $T$ . Le nombre d'Eckert  $Ec = \frac{U_0^2}{C_P \Delta T}$  mesure l'importance de cet effet: si  $Ec \ll 1$ , la contribution des forces visqueuses à l'échauffement du fluide peut être négligée.

Pour l'ensemble des problèmes convectifs, les échanges de chaleur en paroi se mesurent à l'aide du nombre de Nusselt:

$$Nu = \frac{\varphi_{reel}}{\lambda \Delta T / L_{ref}}$$

où le numérateur désigne le flux de chaleur qui passe effectivement à travers la paroi et le dénominateur le flux qui circulerait si seule la conduction agissait.

En convection forcée, le nombre de Nusselt est de la forme:  $Nu = f(Re, Pr)$ .

En convection naturelle, il s'écrit:  $Nu = f(Gr, Pr)$  ou encore  $Nu = f(Ra, Pr)$

Nombre de Nusselt	$Nu = \frac{hl}{\lambda}$	$h$ : coefficient de convection $l$ : longueur caractéristique $\lambda$ : conductivité thermique du fluide	$Nu$ traduit la qualité de l'échange thermique : une augmentation de ce nombre traduit une contribution importante de l'écoulement sur l'échange de chaleur avec la paroi
Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{a}$	$\nu$ : viscosité cinématique $a$ : diffusivité thermique du fluide	$Pr$ compare l'aptitude du fluide à diffuser la quantité de mouvement par le biais de sa viscosité à son aptitude à diffuser la chaleur par le biais de sa diffusivité thermique
Nombre de Reynolds	$Re = \frac{Ud}{\nu}$	$U$ vitesse moyenne de l'écoulement, $d$ dimension caractéristique et $\nu$ viscosité cinématique du fluide	
Nombre de Péclet	$Pe = \frac{Ud}{\alpha}$	$U$ vitesse moyenne de l'écoulement, $d$ dimension caractéristique et $\alpha = \frac{\rho C_P}{\lambda}$ diffusivité thermique du fluide	une valeur élevée de $Pe$ traduit une distorsion importante du champ de température due à l'écoulement par rapport à ce qu'il serait si seule la diffusion était présente
Nombre de Grashof	$Gr = \frac{g\beta\Delta T l^3}{\nu^2}$	$\beta$ coefficient de dilatabilité du fluide, $l$ dimension caractéristique, $g$ gravité et $\nu$ viscosité cinématique du fluide	une augmentation de $Gr$ traduit une augmentation de l'intensité de la convection naturelle
Nombre de Rayleigh	$Ra = \frac{g\beta\Delta T l^3}{\nu a}$	$\nu$ viscosité cinématique, $a$ diffusivité thermique du fluide	$Ra = Gr.Pr$ pour de l'air ou des fluides de nombre de Prandtl proche de l'unité, $Ra$ et $Gr$ sont très proches
Nombre de Richardson	$Ri = \frac{g\beta\Delta T l}{U^2}$		en convection mixte, $Ri \gg 1$ traduit l'importance de la convection naturelle par rapport à la convection forcée

Figure 1.1: Nombres sans dimension utiles en convection

# Chapter 2

## Convection forcée interne

Ce chapitre présente quelques résultats relatifs à la convection interne, c'est à dire en conduite. On traitera d'abord le cas des écoulements laminaires, puis turbulents.

### 2.1 Convection forcée laminaire en conduite circulaire chauffée à flux constant

- situation très courante (échangeurs)
- la conduite fournit un flux constant :  $\varphi_p(T_{\text{paroi}} > T_{\text{fluide}})$
- le champ de vitesse est un écoulement de Poiseuille supposé non perturbé par la convection naturelle. Il est en régime établi.
- le champ de température est supposé aussi établi, cela suppose qu'on soit suffisamment éloigné de la zone d'entrée où prend naissance une couche limite thermique

La longueur,  $L$ , d'établissement sera estimée plus précisément par la suite. Elle est telle que :

$$\frac{L}{D} \approx 0,05.Re_D \quad \text{avec } Re_D = \frac{UD}{\nu}$$

Un simple bilan thermique sur une tranche  $dx$  donne:

$$dP = \varphi 2\pi R dx = \dot{m} C_P dT$$

d'où l'expression de l'accroissement de température le long de la conduite:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2\pi R \varphi}{\rho Q C_P} = Cste$$

La température croit donc linéairement le long du tube.

Par ailleurs, on peut très simplement montrer que la solution de l'équation de la chaleur donne un profil de  $T$  qui est un polynome de degré 4. On en déduit le nombre de Nusselt :

$$Nu = \frac{48}{11} = 4,36$$

Toutefois on peut déduire sans calculs l'ordre de grandeur de la différence de température entre la paroi et l'axe en disant que cet écart doit être tel qu'il permette le passage du flux  $\varphi$  imposé par la paroi:

$$\varphi \approx \lambda \frac{T_P - T_{axe}}{R} \rightarrow T_P - T_{axe} \approx \frac{\varphi R}{\lambda}$$

Ceci est confirmé par la figure 2.3 qui montre les profils de  $T$  dans les directions radiales et axiales.

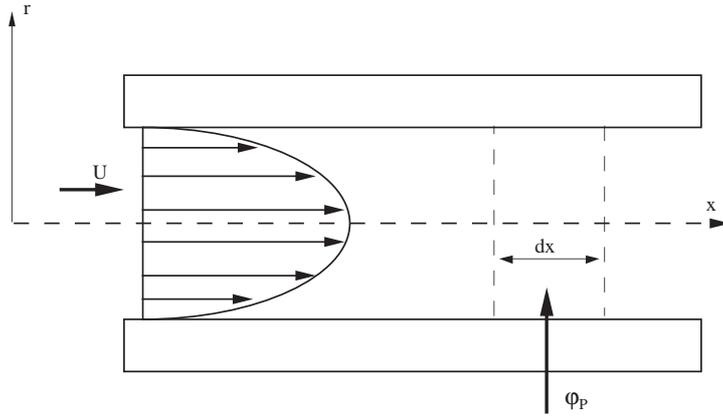


Figure 2.1: Conduite circulaire chauffée sous flux constant

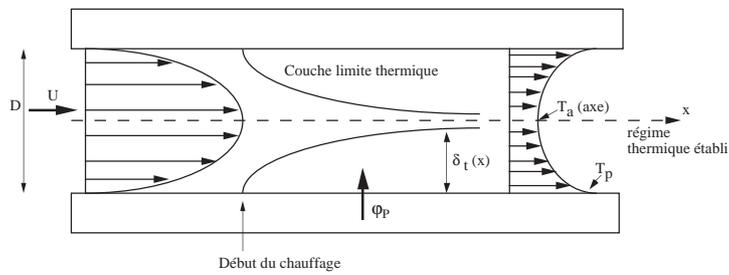


Figure 2.2: Etablissement du régime thermique à l'entrée d'une conduite circulaire chauffée sous flux constant

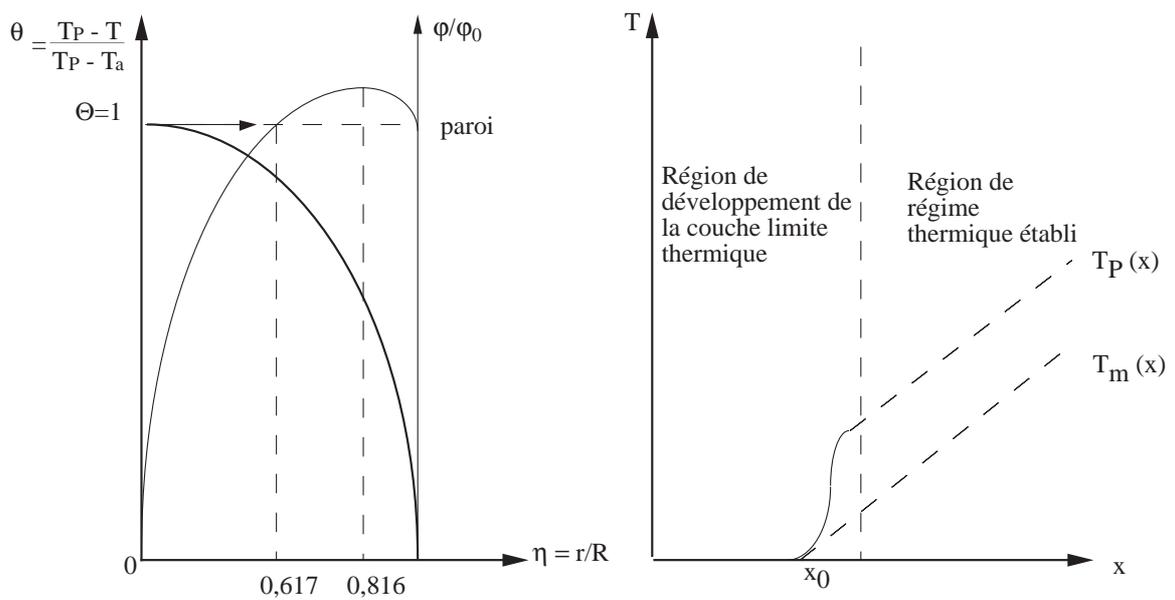


Figure 2.3: Conduite circulaire chauffée sous flux constant: profils de température et de flux radial de la chaleur.

Convection laminaire en canal rectangulaire chauffé à flux constant La corrélation de Shah et London (1978) donne le nombre de Nusselt en fonction du rapport d'aspect  $\gamma$  du canal pour un chauffage à flux constant sur les 4 faces du canal :

$$Nu = 8,235(1 - 2,0421\gamma + 3,0853\gamma^2 - 2,4765\gamma^3 + 1,0578\gamma^4 - 0,1861\gamma^5)$$

ou  $\gamma$  est le rapport du plus petit coté au plus grand et est donc inférieur à 1. Pour un canal carré ( $\gamma = 1$ ) on obtient ainsi :  $Nu = 3,64$ . Le nombre de Nusselt est défini ici comme :  $Nu = \frac{hD_h}{\lambda}$ .

## 2.2 Convection forcée laminaire dans des conduites de section quelconque

La Figure 2.4 , extraite du livre de Incropera and de Witt, donne le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement pour des écoulements laminaires dans des conduites de section quelconque.

**TABLE 8.1** Nusselt numbers and friction factors for fully developed laminar flow in tubes of differing cross section

Cross Section	$\frac{b}{a}$	$Nu_D \equiv \frac{hD_h}{k}$		$f Re_{D_h}$
		(Uniform $q_s''$ )	(Uniform $T_s$ )	
	—	4.36	3.66	64
	1.0	3.61	2.98	57
	1.43	3.73	3.08	59
	2.0	4.12	3.39	62
	3.0	4.79	3.96	69
	4.0	5.33	4.44	73
	8.0	6.49	5.60	82
	$\infty$	8.23	7.54	96
	—	3.11	2.47	53

Used with permission from W. M. Kays and M. E. Crawford, *Convection Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1980.

Figure 2.4: Nombre de Nusselt et facteur de friction  $f$  ( $f$  tel que  $\Delta P = f \frac{L}{D_h} \frac{1}{2} \rho V^2$ ) pour des écoulements laminaires pleinement développés en conduites de section quelconque (d'après Incropera and De Witt). La première colonne représente le rapport d'aspect de la conduite, la seconde le nombre de Nusselt lorsqu'un flux uniforme est imposé à la paroi, la troisième le nombre de Nusselt lorsque la paroi est main tenue à température uniforme.

## 2.3 Convection forcée turbulente dans un tube quelconque

Du fait de la présence de tourbillons dans l'écoulement, la diffusivité apparente du fluide augmente et les transferts de chaleur s'en trouvent intensifiés. On donne ici d'abord quelques résultats relatifs aux écoulements en tubes cylindriques puis on donnera la marche à suivre pour des conduites turbulentes de section quelconque.

Écoulement turbulent en tube circulaire lisse infiniment long :

Pour  $L/D > 60$  ;  $0,7 < Pr < 100$  ;  $10^4 < Re_D < 1,2 \cdot 10^5$

Formule de COLBURN :  $Nu_D = 0,023 \cdot Pr^{1/3} \cdot Re_D^{0,8} \left( Nu_D = \frac{\varphi}{\lambda \Delta T / D} \right)$

Les propriétés du fluide sont évaluées à  $(T_{\text{paroi}} + T_{\text{mélange}})/2$

On peut aussi utiliser la corrélation tirée d'expériences de DITTUS et BOELTER :

$$\left. \begin{array}{l} Nu_D = 0,0243 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \quad \text{si } T_p > T_m \\ Nu_D = 0,0265 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,3} \quad \text{si } T_p < T_m \end{array} \right\} Nu = \frac{\varphi}{\lambda \frac{\Delta T}{D}}$$

[Propriétés à prendre à  $(T_p + T_m)/2$ ].

Pour des nombres de Reynolds plus grands, ( $10^4 < Re < 5 \cdot 10^6$ ) et un nombre de Prandtl proche de celui de l'air ( $0,5 < Pr < 1,5$ ), la formule suivante peut être employée:

$$Nu_D = \frac{\varphi}{\lambda \Delta T / D} = 0,0214 [Re_D^{0,8} - 100] Pr^{0,4}$$

Tubes courts:

Selon la longueur on utilisera:

- pour  $20 < \frac{L}{D} < 60 \rightarrow Nu_{D,L} = Nu_{D,\infty} \left[ 1 + 6 \frac{D}{L} \right]$
- pour  $2 < \frac{L}{D} < 20 \rightarrow Nu_{D,L} = Nu_{D,\infty} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{0,7} \right]$

Dans ces deux dernières formules,  $Nu_{D,\infty}$  est celui d'un tube infiniment long ( $\frac{L}{D} > 60$ ).

La modélisation numérique permet d'avoir des informations plus précises sur le profil transverse de vitesse et de température dans la conduite mais ce type de renseignements n'est souvent nécessaire que lors du développement d'un nouveau produit et rarement lors du dimensionnement d'un projet industriel.

Pour des conduites de section quelconque, on peut, à défaut de données fiables, reprendre les formules valables en tubes circulaires et remplacer  $D$  par le diamètre hydraulique  $D_H$  de la conduite qu'on souhaite étudier.

# Chapter 3

## Convection forcée externe

Contrairement au chapitre précédent qui décrit les échanges thermiques à l'intérieur d'une conduite on s'intéresse ici aux échanges lorsque le fluide s'écoule à l'extérieur d'un corps. On traitera ainsi le cas des écoulements sur plaque plane, laminaires ou turbulents, ainsi que quelques exemples d'écoulements autour d'obstacles.

### 3.1 Convection forcée laminaire sur plaque plane

On assimile la paroi à une plaque plane lorsqu'elle est effectivement plane ou bien lorsque sa concavité est suffisamment faible pour être négligée. Dans une situation confinée, le diamètre hydraulique peut être suffisamment faible pour que l'écoulement soit laminaire. L'écoulement près d'une paroi consiste en une zone lointaine (éloignée de la paroi), de vitesse  $U_0$ , et une zone très mince, où les gradients transverses de vitesse sont élevés, permettant de respecter la condition  $U = 0$  à la paroi. Cette zone est appelée couche limite hydrodynamique (voir Figure 3.1).

Cette couche limite est d'une importance essentielle dans les transferts thermiques entre le fluide et la paroi : il existe également une zone mince près de la paroi où les variations de température sont rapides : c'est la couche limite thermique (voir Figure 3.2). Nous allons montrer, dans le prochain paragraphe, comment les équations du mouvement et de l'énergie pourraient être simplifiées en vue d'une éventuelle résolution analytique. Puis, dans les paragraphes suivants, nous simplifions encore le problème pour faire ressortir non pas la valeur exacte du nombre de Nusselt mais son ordre de grandeur en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement et du nombre de Prandtl du fluide.

#### 3.1.1 Rappel sur les couches limites hydrodynamique et thermique

Pour simplifier, on supposera :

- écoulement 2D (l'écoulement n'a donc que 2 composantes de vitesse, une le long de la paroi et une dans la direction normale à celle-ci.
- régime permanent  $\partial/\partial t = 0$
- $\Phi_S = 0$  : pas de sources internes de chaleur : la puissance thermique associée à la dissipation visqueuse est négligée.
- propriétés physiques ( $\mu, \alpha, \rho, \lambda$ ) constantes

Un traitement rigoureux de la couche limite nécessiterait la résolution complète des équations de Navier-Stokes. Leur complexité a donné à PRANDTL l'idée de les simplifier pour ne retenir que les termes les plus importants. L'idée principale consiste à négliger les gradients axiaux  $\partial/\partial x$  devant les gradients transverses  $\partial/\partial y$ . On obtient ainsi les équations de PRANDTL de la couche limite:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

et :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Ces équations ont été établies en supposant que  $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$  et que la pression ne varie pas suivant la direction  $Oy$ . Un raisonnement analogue fournit une équation simplifiée de la température:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

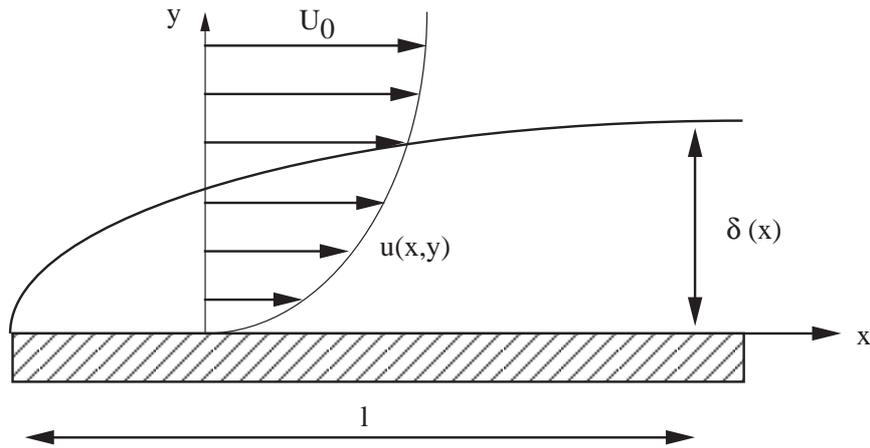


Figure 3.1: Développement d'une couche limite hydrodynamique sur une plaque plane

La résolution combinée de ces 3 équations (qdm suivant  $x$ , pression et température) permet le traitement d'une couche limite thermique sur paroi en présence d'un écoulement. Cela reste encore complexe et l'objet de ce cours est plutôt de discuter les ordres de grandeur régissant les échanges de chaleur et le nombre de Nusselt associé. Il est pour cela utile de se rappeler qu'une couche limite résulte de la compétition entre deux effets qui sont:

- la diffusion (de quantité de mouvement ou de chaleur selon qu'on s'intéresse à une couche limite cinématique ou thermique). Celle-ci est dominante dans la direction  $y$  normale à la paroi qui présente les plus forts gradients.

- la convection, c.a.d. le transport, par l'écoulement lointain qui a lieu principalement suivant  $Ox$ .

Pour la couche cinématique, pendant un temps  $t$ , elle aura diffusé transversalement d'une distance  $\delta = \sqrt{\nu t}$ . Pendant ce temps, la convection l'aura déplacée de  $x = U_0 t$ . L'élimination de  $t$  dans ces deux relations fournit:

$$\frac{\delta}{x} = \left( \frac{\nu}{U_0 x} \right)^{1/2} = Re_x^{-1/2}$$

L'expression précédente fait apparaître le nombre de Reynolds local  $Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}$  basé sur l'abscisse le long de la plaque : il varie donc en tout point de la plaque depuis la valeur 0 en  $x = 0$  jusqu'à sa valeur maximale en  $x = l$  où il vaut  $Re_l = \frac{U_0 l}{\nu}$ . Comme il a été vu en cours de Mécanique des Fluides de M1, cette dernière valeur doit être inférieure à  $10^5$  environ pour que l'écoulement reste laminaire. L'expression de  $\delta$  peut aussi s'écrire  $\delta = \left( \frac{\nu x}{U_0} \right)^{1/2}$  qui montre l'évolution en  $\sqrt{x}$  de la couche limite.

Le traitement par ordres de grandeur de problèmes thermiques nécessite de considérer 2 cas extrêmes caractérisés par  $Pr \ll 1$  ou  $Pr \gg 1$  (voir Figure 3.3).

### 3.1.2 Echanges thermiques sur plaque plane pour $Pr \ll 1$

Dans ce cas la chaleur diffuse plus rapidement que la quantité de mouvement et l'épaisseur de la couche limite thermique sera plus grande que celle de la couche limite cinématique:

$$\delta \ll \delta_t$$

Le même raisonnement que pour la couche limite cinématique peut être appliqué à la Couche limite thermique. Pendant un temps  $t$  elle aura diffusé transversalement de  $\delta_t = \sqrt{\alpha t}$ . Pendant ce même temps elle aura été convectée à la vitesse  $U_0$  (puisque presque toute la couche thermique se trouve plongée dans une zone se déplaçant à  $U_0$ , voir Figure 3.3-a). Ainsi, on a :

$$\delta_t \approx \sqrt{\frac{\alpha x}{U_0}}$$

d'où:

$$\frac{\delta}{\delta_t} \approx \sqrt{\nu/\alpha} = Pr^{1/2} \ll 1$$

On peut alors estimer le flux de chaleur extrait de la paroi:

$$\varphi_p \approx +\lambda \cdot \frac{T_P - T_0}{\delta_t}$$

et en le normalisant par :  $\lambda \frac{T_P - T_0}{x}$ , on obtient:

$$Nu_x \approx \frac{x}{\delta_t}$$

soit:

$$Nu_x \approx Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/2}$$

avec:

$$Re_x = \frac{U_0 \cdot x}{\nu}$$

### 3.1.3 Echanges thermiques sur plaque plane pour $Pr \gg 1$

Le même raisonnement s'applique au calcul de  $\delta$  qui garde la même expression. Toutefois, celui relatif à  $\delta_t$  doit être revu. En effet, le nombre de Prandtl est maintenant tel que:

$$\delta_t \ll \delta$$

La couche limite thermique est donc incluse dans une région de plus basse vitesse que  $U_0$ , variant de 0 à la paroi jusqu'à une valeur que l'on peut estimer à  $\frac{\delta_t}{\delta} \cdot U_0$  si on linéarise le profil de vitesse de  $U$ . Pendant un temps  $t$ , on écrit donc:

$$\delta_t = \sqrt{\alpha t} \quad \text{et} \quad x = \frac{\delta_t}{\delta} \cdot U_0 t$$

d'où:

$$\delta_t \approx \frac{x^{1/2} \nu^{1/6} \alpha^{1/3}}{U_0^{1/2}}$$

On peut former le rapport des épaisseurs des 2 couches:

$$\frac{\delta}{\delta_t} \approx \sqrt[3]{\nu/\alpha} = Pr^{1/3}$$

Le nombre de Nusselt s'écrit maintenant:

$$Nu_x = \frac{x}{\delta_t} \approx Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

Seul l'exposant du nombre de Prandtl a changé par rapport au cas  $Pr \ll 1$ . La figure 3.4 tirée de Eckert and Drake, fournit les résultats de l'analyse exacte (traitement complet des équations de la couche limite que nous avons évoqué dans le premier paragraphe).

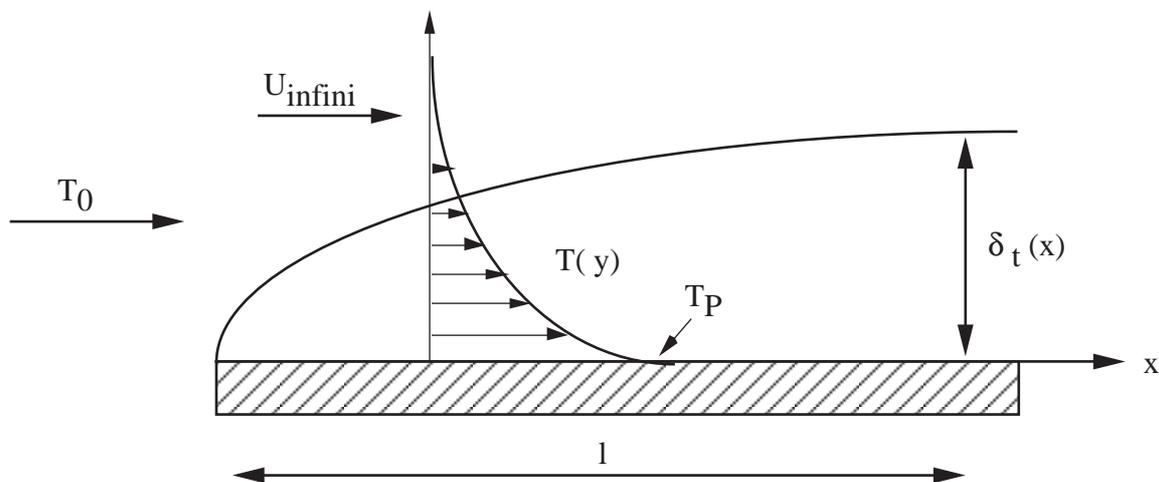


Figure 3.2: Couche limite thermique sur plaque plane

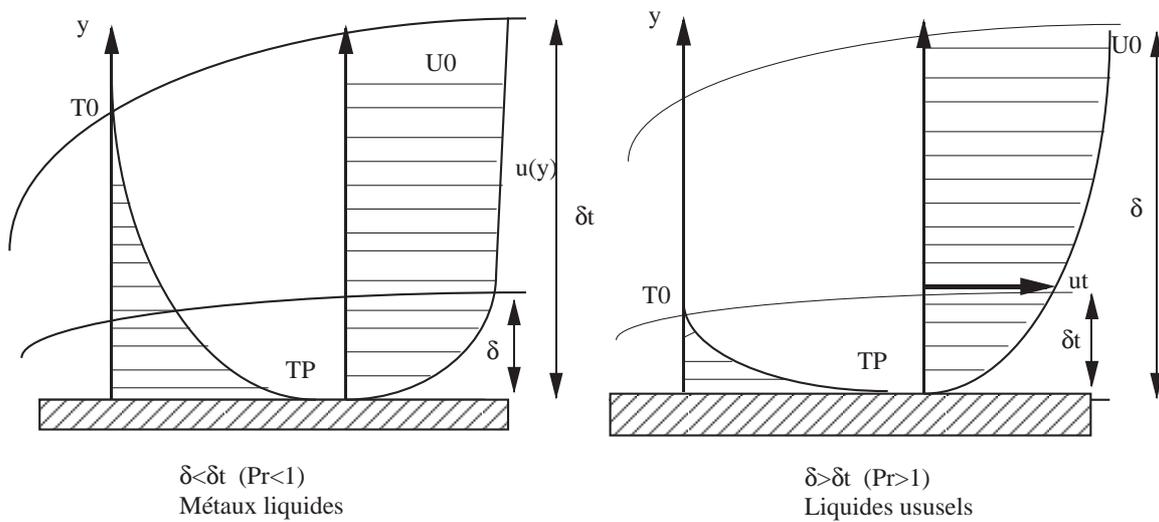


Figure 3.3: Profils de température et de vitesse en fonction du nombre de Prandtl. a)-  $Pr \ll 1$  la couche limite se trouve presque entièrement située dans une zone où la vitesse vaut  $U_0$  b)-  $Pr \gg 1$  la couche limite thermique se trouve placée dans une région où la vitesse évolue de 0 à la paroi jusqu'à une valeur  $U_t$  en  $y = \delta_t$ .

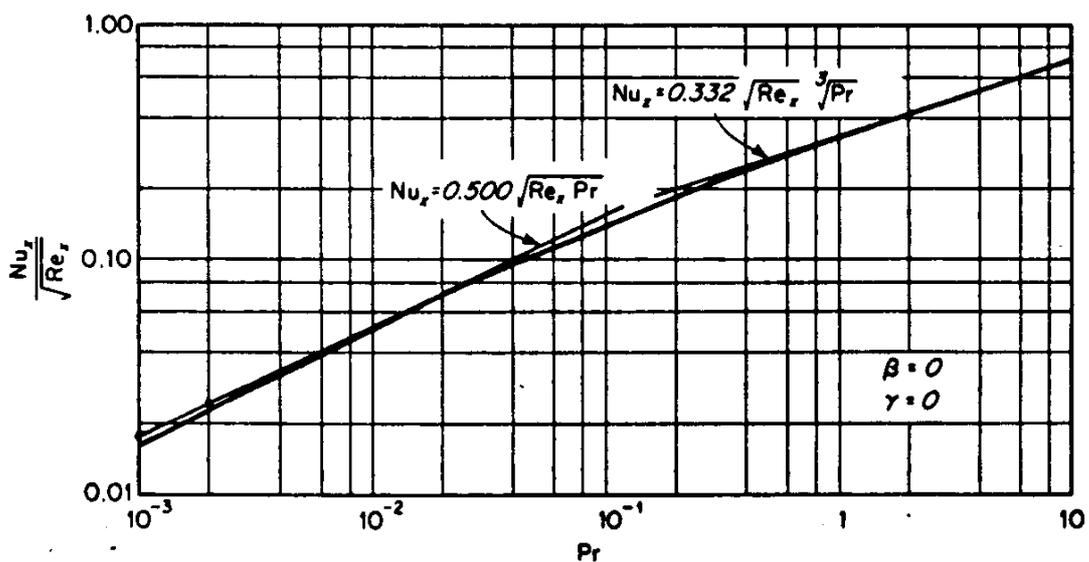


Figure 3.4: Couche limite laminaire sur plaque plane: Nusselt number vs Prandtl number (Eckert & Drake - Analysis of heat & mass transfer)

### 3.1.4 Expressions exactes - Flux total échangé (en laminaire)

Le calcul complet tenant compte du profil de vitesse réel dans la couche limite est en fait possible pour certains écoulements et notamment celui sur plaque plane. On trouve :

- Pour  $Pr < 0.1$  :  $Nu_x = 0,565.Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/2}$

(Les propriétés du fluide sont à prendre à la température du film  $\frac{T_p+T_\infty}{2}$ .)

$$\text{Nombre de Nusselt global : } Nu_L = \frac{\phi/L}{\lambda \frac{\Delta T}{L}} = \frac{\int_0^L \varphi \cdot dx}{\lambda \Delta T} = \int_0^L \frac{Nu_x \cdot \lambda \frac{\Delta T}{x} \cdot dx}{\lambda \Delta T} = \int_0^L Nu_x \frac{dx}{x}$$

$$\text{soit : } Nu_L = \int_0^L 0,565.Pr^{1/2} \left(\frac{U_{o,x}}{\nu}\right)^{1/2} \cdot \frac{dx}{x} = 1,13.Re_L^{1/2} Pr^{1/2} \quad \text{avec}$$

$$Re_L = \frac{U_0 \cdot L}{\nu}$$

- Pour  $Pr > 0.1$  :  $Nu_x = 0,332.Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$

$$\text{de même : } Nu_L = 0,664.Re_L^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

Le tableau suivant synthétise les résultats :

$Pr \ll 1$	$Nu_L = 1,13.Re_L^{1/2} Pr^{1/2}$
$Pr \gg 1$	$Nu_L = 0,664.Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$

*Nombre de Nusselt pour un écoulement laminaire d'un fluide sur une plaque plane*

## 3.2 Convection forcée turbulente sur plaque plane

Corrélations usuelles : Lorsque le nombre de Reynolds local  $Re_x$  excède la valeur  $Re_x > 3 \cdot 10^5$  on adopte les résultats suivants :

$$\left. \begin{array}{l} Nu_x = 0,029.Pr^{1/3}.Re_x^{4/5} \\ Nu_L = 0,036.Pr^{1/3}.Re_L^{4/5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,5 < Pr < 50 \\ \text{écoulement turbulent sur toute la plaque} \end{array}$$

Une étude détaillée du profil de température dans la direction transverse à la plaque révèle que celui-ci est très similaire à ce qui est observé pour le champ de vitesse (voir cours de Mécanique des Fluides de M2) qui s'exprime ainsi:

- $u^+ = y^+$  pour  $y^+ \in [0; 10]$

- $u^+ = 5.5 + \frac{1}{\kappa} \ln y^+$  pour  $y^+ \in [100; 1000]$  où  $\kappa = 0.41$  est la constante de Karman.  
On montre donc que le profil de  $T$  s'écrit:

- dans la zone visqueuse ( $y^+ \in [0; 10]$ ):  $T^+ = Pr \cdot y^+$  avec  $T^+ = \frac{\rho C_P U^* (T_P - \bar{T})}{\varphi_P}$

où  $U^*$  est la vitesse de frottement classiquement définie,  $T_P$  et  $\varphi_P$  la température et le flux à la paroi.  $\bar{T}$  désigne la température de mélange de l'écoulement.

- dans la zone Log on trouve:  $T^+ = 2.195 \ln y^+ + 13.2 Pr - 5.66$

On voit donc que l'allure générale des profils de  $T$  et de  $U$  sont très semblables, que ce soit dans la zone visqueuse ou dans la zone Log.

## 3.3 Ecoulements forcés autour d'obstacles

### 3.3.1 Obstacles cylindriques

Cette situation correspond par exemple à celle des échangeurs à tubes et calandre dans lesquels le fluide de la calandre croise les tubes. L'écoulement autour d'un cylindre dépend fortement de  $Re$  (voir Figure 3.5).

- Si  $Re \ll 1$  (rare) : écoulement purement visqueux symétrique
- Si  $Re \nearrow$  mais reste inférieur à 40, il existe 2 tourbillons attachés derrière le cylindre

- Si  $Re > 40$ , il existe une allée de tourbillons de Von Karman à l'aval du cylindre
- Si  $Re \nearrow$  encore, la couche limite qui se développe à partir du point d'arrêt à  $\theta = 0$  devient turbulente et décolle à  $\theta_d$ 
  - $Re < 3.10^5 \rightarrow \theta_d = 80^\circ$
  - $Re > 3.10^5 \rightarrow \theta_d = 120^\circ$  et la couche limite est turbulente même entre  $\theta = 0$  et  $\theta = \theta_d$

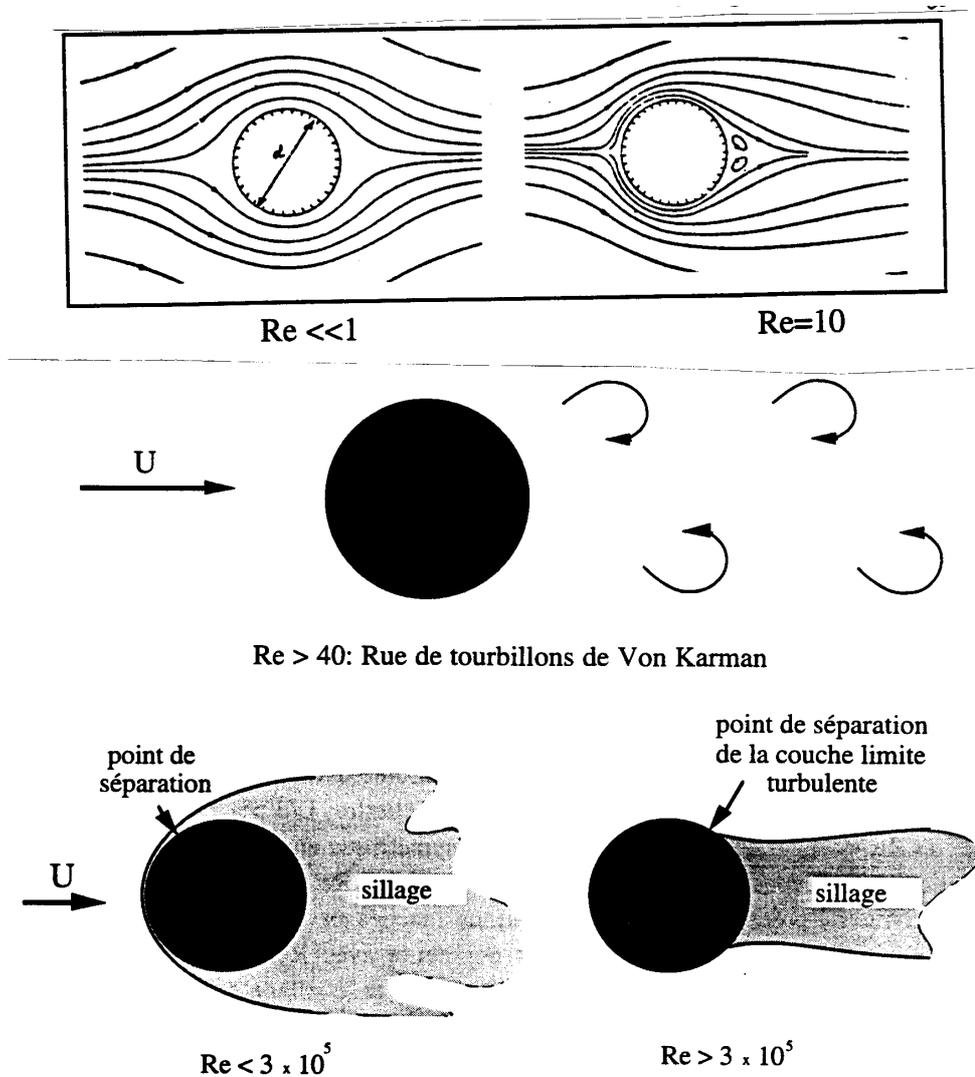


Figure 3.5: Écoulement autour d'un cylindre. Ref.: Favre-Marinet, cours de l'ENSHMG

Résultats expérimentaux concernant les échanges thermiques (Fig. 3.6 et 3.7):

- Si  $Re$  petit,  $Nu$  est petit (de quelques unités), surtout à l'aval où les recirculations sont peu actives.
- Pour  $Re > 426\ 000$ ,  $Nu$  augmente beaucoup (plusieurs centaines) avec un max vers  $\theta_d = 120^\circ$

Synthèse des résultats expérimentaux : (Hilpert, 1993)

$Re \in [1, 4000]$	$\overline{Nu} = 0,43 + 0,53.Pr^{0,31}.Re^{0,5}$
$Re \in [4000, 40000]$	$\overline{Nu} = 0,43 + 0,193.Pr^{0,31}.Re^{0,618}$
$Re \in [40000, 400000]$	$\overline{Nu} = 0,43 + 0,0265.Pr^{0,31}.Re^{0,805}$

*Écoulement autour d'un cylindre : nombre de Nusselt vs  $Re$ .*

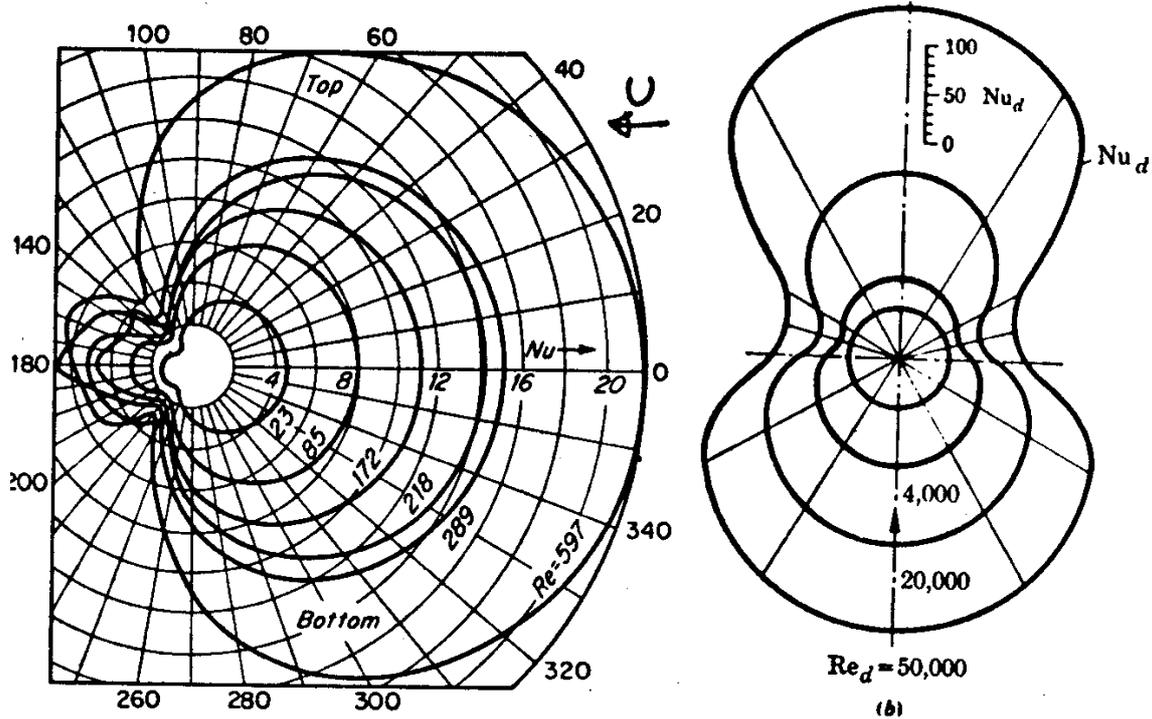


Figure 3.6: Distribution azimuthale du coefficient d'échange autour d'un cylindre dans un écoulement d'air- a)  $Re$  petit, b)  $Re$  intermédiaire. Ref.: Eckert and Drake. Attention: l'écoulement va de droite à gauche sur la Fig.a et de bas en haut sur la Fig.b.

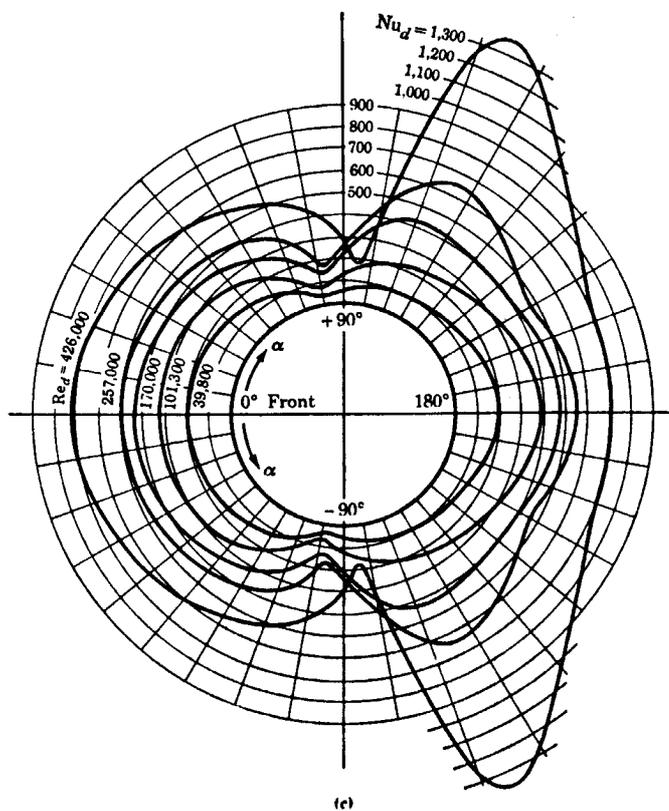


Figure 3.7: Distribution azimuthale du coefficient d'échange autour d'un cylindre dans un écoulement d'air-  $Re \gg 1$ . Ref.: Eckert and Drake (l'écoulement va de gauche à droite).

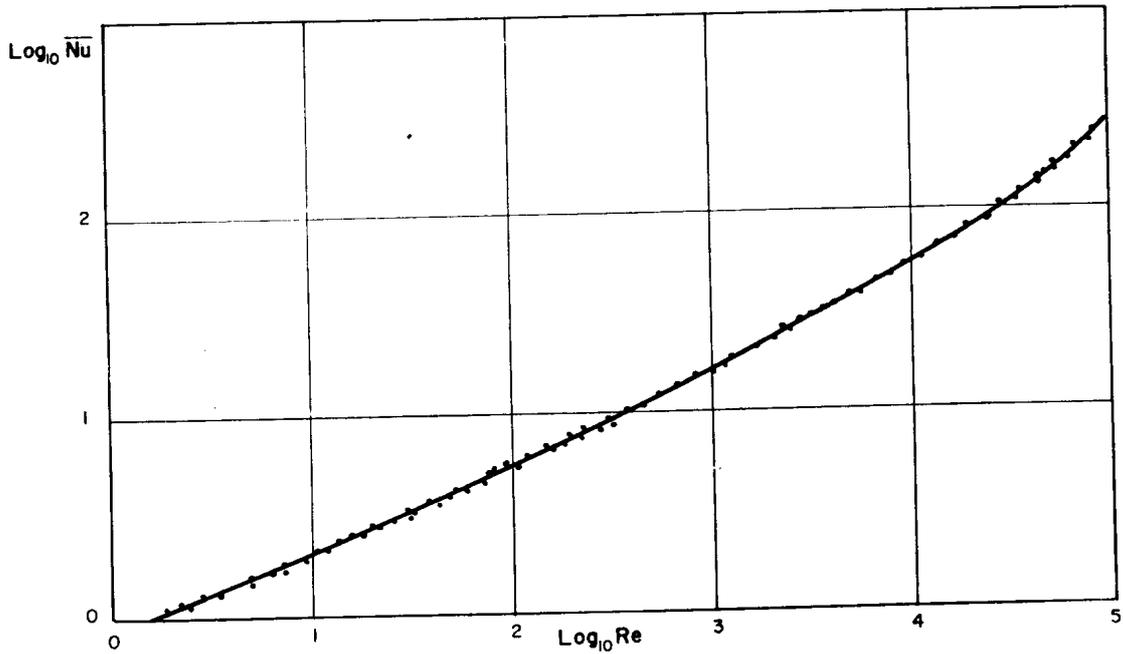
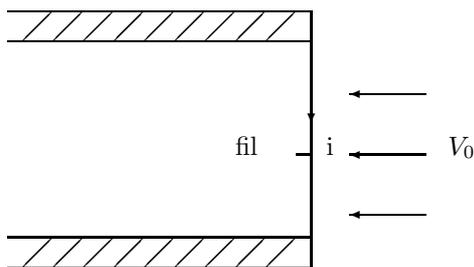


Figure 3.8: Convection forcée autour d'un cylindre dans l'air. Nombre de Nusselt moyen en fonction de  $Re$  d'après Hilpert (1933).

avec  $\overline{Nu} = \frac{\bar{\varphi}}{\lambda \frac{(T_1 - T_2)}{d}}$  et  $\bar{\varphi} = \frac{\phi}{S}$  et  $Re = \frac{V_\infty \cdot d}{\nu}$

Application à la mesure de vitesse par fil chaud : La sonde est un fil de platine de diamètre très petit  $d \approx 5\mu m$ . Un asservissement électronique le maintient à température constante par apport calorifique d'un courant engendrant un effet Joule. La mesure du courant  $i$  est fonction du flux  $\phi$  échangé par le fil.



Calcul de  $Re$  dans l'air à  $V_0 = 100$  m/s : la viscosité cinématique  $\nu \approx 10^{-5} m^2/s$  : on en déduit  $Re = \frac{V_0 d}{\nu} \approx 50$  (on est donc en régime laminaire) et le nombre de Nusselt dépend de  $Re^{-1/2}$  d'où  $\overline{Nu}_u \approx \sqrt{V_0}$

Par ailleurs  $\overline{Nu}_u = \frac{\phi / \pi d L}{\lambda \Delta T / d} = \frac{\phi}{\pi L \lambda \Delta T}$

Donc le flux  $\phi$  est proportionnel à  $\sqrt{V_0}$  : la réponse de la sonde sera non-linéaire de sorte que la sonde nécessitera un étalonnage préalable réalisé dans une petite soufflerie par exemple où la vitesse est très bien connue.

### 3.3.2 Obstacles non circulaires

Là encore on introduit un coefficient d'échange  $h$  tel que:

$$\phi = h S \Delta T$$

de sorte que le nombre de Nusselt devient:

$$Nu_d = \frac{\phi}{\lambda \frac{\Delta T}{d} \cdot S} = \frac{hS\Delta T}{\lambda \frac{\Delta T}{d} \cdot S} = \frac{hd}{\lambda}$$

On pose  $Nu_d = C.Re_d^m.Pr^{0,35}$  avec  $Re_d = U_\infty.d/\nu$   
 La figure 3.9 donne les valeurs de  $C$  et  $m$  pour diverses géométries.

$$Nu_d = \frac{\bar{h}d}{\lambda} = C.Re_d^m.Pr^{0,35}$$

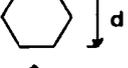
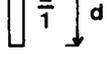
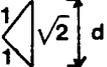
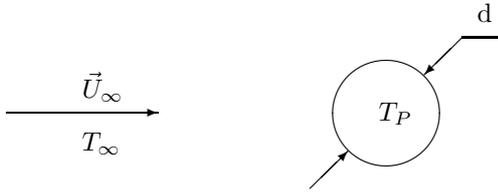
	$Re_d$	$C$	$m$	Ref.
→ 	$5.10^3$ à $10^5$	0,25	0,588	/21/
→ 	$2,5.10^3$ à $8.10^3$ $5.10^3$ à $10^5$	0,180 0,104	0,699 0,675	/22/ /22/
→ 	$2,5.10^3$ à $1,5.10^4$	0,25	0,612	/22/
→ 	$3.10^3$ à $1,5.10^4$	0,096	0,804	/22/
→ 	$5.10^3$ à $10^5$	0,156	0,638	/21/
→ 	$5.10^3$ à $1,95.10^4$ $1,95.10^4$ à $10^5$	0,162 0,0395	0,638 0,782	/21/
→ 	$3.10^3$ à $2.10^4$	0,264	0,66	
→ 	$4.10^3$ à $1,5.10^4$	0,232	0,731	/22/
→ 	$3.10^3$ à $2.10^4$	0,246	0,61	

Figure 3.9: Coefficients d'échanges en fonction de la géométrie en convection forcée externe. (d'après Taine et Petit). La flèche indique le sens de l'écoulement.

### 3.3.3 Obstacle sphérique



Dans les conditions suivantes:

$$0,6 < Pr < 400 \quad \text{et} \quad Re < 7.10^4$$

on a :

$$\boxed{Nu_d = \frac{hd}{\lambda} = 2 + 0.6 Pr^{1/3} . Re_d^{1/2}}$$

*Ecoulement autour d'une sphère: nombre de Nusselt en fonction de Re et Pr.*

# Chapter 4

## Convection naturelle

### 4.1 Introduction

Rappel de la définition : il s'agit de la description du mouvement d'un fluide engendré par les forces d'Archimède dues aux variations de la masse volumique avec la température. Il y a donc couplage de la dynamique et de la thermique. Le champ de vitesse transporte la chaleur et, du fait de la dépendance de  $\rho$  avec  $T$ , agit sur la distribution de masse volumique ; en retour, les modifications de masse volumique créent du mouvement par le biais de la poussée d'Archimède.

La convection naturelle est un phénomène important dans de nombreux procédés industriels :

- refroidissement d'appareils électriques
- collecteurs solaires
- chauffage des locaux
- centrales nucléaires

Les équations du mouvement en présence de convection naturelle ont été présentées dans le chapitre 1 : leur forme adimensionnelle a fait apparatre les nombres de Grashof et de Rayleigh :

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T \cdot l^3}{\nu^2} \quad \text{et} \quad Ra = Gr.Pr = \frac{g \beta \Delta T \cdot l^3}{\alpha \nu}$$

où  $\beta$  désigne la dilatabilité thermique du fluide :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$$

Pour un gaz parfait on montre facilement que  $\beta = \frac{1}{T}$ . Par exemple, pour de l'air à 20C, assimilé à un gaz parfait, on obtient :  $\beta = \frac{1}{293} \approx 3.10^{-3}$ .

Avant de présenter les résultats d'échanges thermiques par convection naturelle le long d'une paroi, il faut préciser le critère qui caractérise la transition laminaire/turbulent d'un écoulement ascendant. La figure 4.1 illustre cette question et montre que lorsque le nombre de Grashof local atteint  $10^9$  environ, l'écoulement devient turbulent.

**Régime laminaire** Avant de donner les expressions exactes du nombre de Nusselt il est intéressant, comme nous l'avions fait en convection forcée, de comprendre l'effet du nombre de Prandtl.

- Lorsque  $Pr \gg 1$  cela correspond donc à un fluide ayant plus de facilité à diffuser la quantité de mouvement que la chaleur. Il existe donc une couche limite thermique d'épaisseur  $\delta_t$  (cf. Figure 4.2) dans laquelle la température est plus chaude qu'à l'infini où elle vaut  $T_0$ . Cette couche limite thermique est donc le siège de forces d'Archimède qui élèvent le fluide et il y a création d'un jet pariétal d'épaisseur  $\delta_c$  supérieur à  $\delta_t$ .
- Lorsque  $Pr \ll 1$  l'on s'attendrait à ce que la couche limite thermique soit beaucoup plus épaisse que la couche cinématique. Cela signifierait alors qu'il existerait une zone de fluide immobile dans laquelle la température est pourtant supérieure à  $T_0$ . Cela est évidemment impossible car la poussée d'Archimède contrarierait cet équilibre instable : on observe en fait que les couches limites cinématiques et thermiques ont la même épaisseur (cf. Figure 4.3).

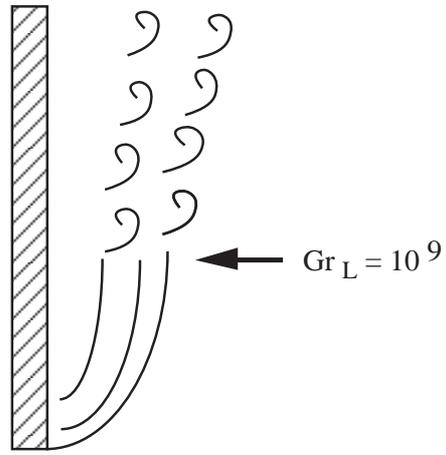


Figure 4.1: Convection naturelle le long d'une plaque verticale: transition à la turbulence

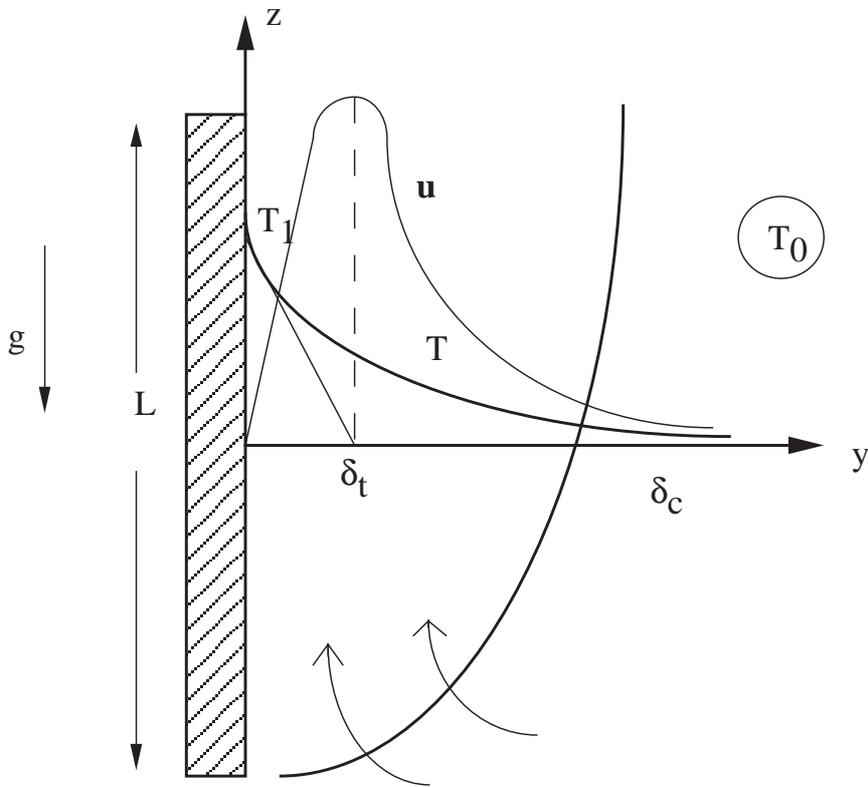


Figure 4.2: Convection naturelle le long d'une plaque plane verticale pour  $Pr \gg 1$ .



### 4.3 Convection naturelle entre plaques verticales parallèles (cheminée)

- Si la longueur  $L \gg 2e$ , on aura un régime hydrodynamique établi.
- On cherche alors un champ de vitesse de la forme :

$$\begin{cases} U_x = u(y) \\ U_y = 0 \end{cases}$$

#### 4.3.1 Condition d'existence de ce régime

Pour une plaque, nous avons vu que l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite était donnée par :

$$\frac{\delta}{L} = Ra_L^{-1/4} \quad \text{lorsque } Pr \approx 1(\text{air})$$

Il y aura régime établi si  $\delta \gg e$  soit  $\frac{e}{L} \cdot Ra_L^{1/4} \ll 1$

Sous forme dimensionnelle cela s'écrit :

$$\frac{e}{L^{1/4}} \cdot \left( \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right)^{1/4} \ll 1$$

Pour obtenir ce régime, on peut donc  $\searrow e$  ou  $\Delta T$  ou  $\nearrow L$ .

#### 4.3.2 Equations du régime établi

Les hypothèses sur le champ de vitesse imposent :

$$NS_x : \frac{\partial p^*}{\partial x} = \rho_0 g \beta (T - T_0) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$T : u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$p^*$  désigne la pression généralisée :  $p^* = p + \rho_0 g x$ . En l'absence de mouvement et de température, la solution sera bien hydrostatique :  $p^* = \text{constante}$  ;  $T = T_0$ .

#### 4.3.3 Cas de deux plaques de même température

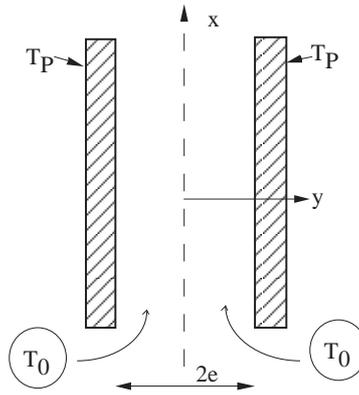


Figure 4.4: Convection naturelle entre deux plaques de même température

L'équation de la chaleur se simplifie puisqu'ici on a  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

$$\rightarrow \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = \text{cste} = 0$$

$\rightarrow T = T_p$  partout ; le fluide est isotherme. Il subit la poussée d'Archimède par rapport au fluide externe à  $T_0$ . Cette poussée sera contrée par la viscosité.

Pour la poussée :  $p^*(x=0) = p^*(x=L)$  car c'est le fluide externe qui communique la pression ambiante hydrostatique aux 2 extrémités de la cheminée. On a donc :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0 \text{ d'où N-S se simplifie :}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g\beta(T_p - T_0)}{\nu} \rightarrow \boxed{u = \frac{g\beta e^2}{2\nu}(T_p - T_0) \left[1 - \left(\frac{y}{e}\right)^2\right]}$$

d'où le débit par unité de largeur :

$$q/l = \int_{-e}^{+e} u dy = \frac{2}{3} \frac{g\beta e^3}{\nu} (T_p - T_0)$$

Bilan thermique entrée/sortie :

$$\frac{\phi}{l} = \rho_0 C_P \frac{q}{l} (T_p - T_0) = \rho_0 \cdot C_P \frac{2g\beta e^3}{3\nu} (T_p - T_0)^2$$

Ce flux a été nécessaire pour faire passer le fluide de  $T_0$  en entrée à  $T_p$  en sortie. Il a en fait été donné dans la zone d'établissement (dans les couches limites), seules régions où le gradient de température à la paroi n'est pas nul. Cela explique l'absence de  $L$  dans l'expression de  $\phi$ .

Nombre de Nusselt :  $\overline{Nu}_L = \frac{\phi/2L \cdot l}{\lambda \cdot \frac{T_p - T_0}{L}}$  (facteur 2 car il existe 2 plaques)

La présence de  $L$  au dénominateur indique que c'est un flux conductif axial qui sert de référence; c'est en effet selon  $x$  qu'il existe un gradient, pas selon  $y$ .

On trouve ainsi :

$$\boxed{\overline{Nu}_L = \frac{Ra_{2e}}{24} = \frac{hL}{\lambda}}$$

avec  $Ra_{2e} = \frac{g\beta\Delta T(2e)^3}{\alpha\nu}$  ( $\Delta T = T_p - T_0$ )

## 4.4 Autres géométries

### 4.4.1 Paroi plane inclinée par rapport à la verticale

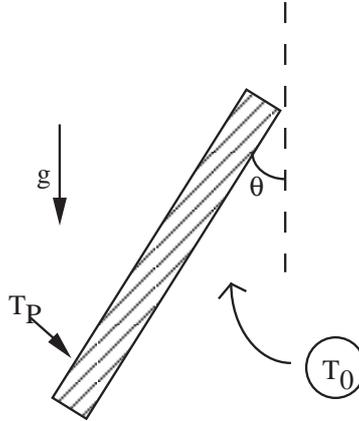


Figure 4.5: Convection naturelle le long d'une paroi inclinée

Il suffit de remplacer  $g$  par  $g \cos \theta$  dans les formules trouvées en paroi verticale (voir Figure 4.5).

### 4.4.2 Cylindre vertical

- L'effet de courbure sera négligeable si l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite est petite devant le diamètre  $d$  du cylindre :  $\delta \ll d$  Pour un gaz ( $Pr \approx 1$ ) par exemple l'étude sur plaque plane donne :  $\frac{\delta}{L} = Ra_L^{-1/4}$

La condition de courbure négligeable devient donc :

$$\delta = L Ra_L^{-1/4} \ll d \quad \text{soit :} \quad \frac{L}{d Ra_L^{1/4}} \ll 1$$

Introduisons le nombre de Rayleigh,  $Ra_d$ , basé sur le diamètre du cylindre :

$$Ra_d = Ra_L \cdot \frac{d^3}{L^3}, \text{ d'où :}$$

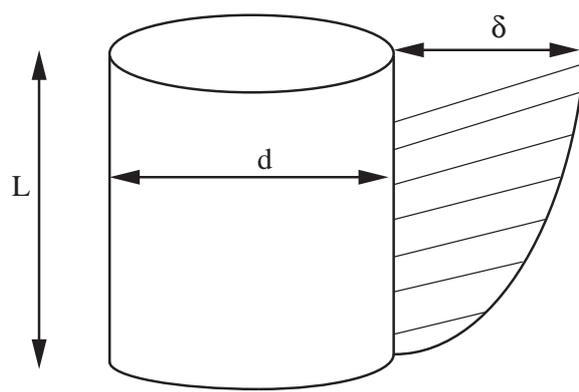


Figure 4.6: Convection naturelle le long d'un cylindre vertical

$$\frac{L}{d} \frac{d^{3/4}}{Ra_d^{1/4} L^{3/4}} \ll 1 \rightarrow \boxed{(Ra_d \cdot \frac{d}{L})^{1/4} \gg 1}$$

Si cette hypothèse est satisfaite on pourra utiliser les formules obtenues pour plaque plane :

$$\text{Pour l'air : } \begin{cases} Nu_L = 0,547.Ra_L^{1/4} & , \text{ en laminaire , } & Ra \in (10^4, 10^9) \\ (Pr = 0.7) \quad \left\| \begin{array}{l} Nu_L = 0,13.Ra_L^{1/3} \\ Nu_L = 0,13.Ra_L^{1/3} \end{array} \right. & , \text{ en turbulent , } & Ra \in (10^9, 10^{13}) \end{cases}$$

#### 4.4.3 Cylindre horizontal

On utilise encore le diamètre  $d$  comme longueur de référence.

Avec une erreur  $< 15\%$  on prendra :

$$\begin{array}{ll} \text{en laminaire} & Nu_d = 0,53.Ra_d^{1/4} \quad Ra \in [10^3, 10^9] \\ \text{en turbulent} & Nu_d = 0,10.Ra_d^{1/3} \quad Ra \in [10^9, 10^{13}] \end{array}$$

#### 4.4.4 Sphère

On prend  $Nu_d = 2 + 0,45Gr_d^{1/4} \cdot Pr^{1/3}$ ,  $Gr_d \in [1, 10^6]$ .

#### 4.4.5 Plaques horizontales

Voir tableau 4.7. La dimension caractéristique à introduire dans le calcul du nombre de Rayleigh est la largeur de la plaque.

- Plaque chauffant vers le haut  $\begin{cases} Nu = 0,54.Ra^{1/4} & Ra \in [10^5, 10^7] \\ Nu = 0,14.Ra^{1/3} & Ra \in [10^7, 10^{10}] \end{cases}$
- Plaque chauffant vers le bas  $\begin{cases} Nu = 0,27.Ra^{1/4} & Ra \in [3 \cdot 10^5, 3 \cdot 10^{10}] \\ Nu = 0,07.Ra^{1/3} & Ra \in [3 \cdot 10^{10}, 10^{13}] \end{cases}$

Géométrie et orientation de la paroi	Dimension caractéristique $l$ pour le calcul de $Gr$ et de $Nu$	Coefficient $C$	
		Convection laminaire $n=1/4$	Convection turbulente $n=1/3$
plaque verticale ou cylindre vertical de grand diamètre par rapport à l'épaisseur de la zone perturbée	hauteur	0,59 ( $10^4 < Gr.Pr < 10^9$ )	0,13 ( $10^9 < Gr.Pr < 10^{13}$ )
cylindre horizontal	diamètre extérieur	0,53 ( $10^3 < Gr.Pr < 10^9$ )	0,10 ( $10^9 < Gr.Pr < 10^{13}$ )
plaque horizontale chauffant vers le haut	largeur	0,54 ( $10^5 < Gr.Pr < 2 \cdot 10^7$ )	0,14 ( $2 \cdot 10^7 < Gr.Pr < 3 \cdot 10^{10}$ )
plaque horizontale chauffant vers le bas	largeur	0,27 ( $3 \cdot 10^5 < Gr.Pr < 3 \cdot 10^{10}$ )	0,07 ( $3 \cdot 10^{10} < Gr.Pr < 10^{13}$ )

Figure 4.7: Coefficient d'échange en convection naturelle: parois verticales ou horizontales  $Nu = C.Ra^n$ . Source: Eyglunet, Thermique théorique et pratique, Hermès

# Formulaire

Gradient d'un scalaire en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ :

$$\vec{\text{grad}} f \left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$$

Divergence d'un vecteur en coordonnées cartésiennes:  $\text{div} \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Divergence d'un vecteur en coordonnées cylindriques:  $\text{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Continuité en cartésien :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0$$

Continuité en cylindrique:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Equations de Navier Stokes en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

Equations de Navier Stokes en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

Contraintes visqueuses dans un fluide newtonien en coordonnées cartésiennes:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left[ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left[ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right]\end{aligned}$$

Contraintes visqueuses dans un fluide newtonien en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned}\tau_{rr} &= 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} &= \mu \left[ \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{zr} = \tau_{rz} &= \mu \left[ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]\end{aligned}$$

Equations de l' énergie en coordonnées cartésiennes (avec  $\rho$  et  $\lambda$  constants):

$$\rho C_P \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q + D$$

Equations de l' énergie en coordonnées cylindriques:

$$\rho C_P \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q + D$$

avec  $q$  source de chaleur interne (électrique, chimique, nucléaire, etc... en  $W/m^3$ ) et  $D$  puissance des forces visqueuses (en  $W/m^3$  également mais souvent négligeables) telle que:

en cartésien :

$$D = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 \right]$$

en cylindrique :

$$D = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]^2 + \mu \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]^2$$

# Bibliographie

Plusieurs des figures de ce document sont tirées des ouvrages suivants qui pourront être consultés avec intérêt.

BEJAN A: Convection Heat Transfer, Edition Wiley.

INCROPERA F. DEWITT D.: Fundamentals of Heat and Mass Transfer.

PETIT J.P., Transfert de chaleur et de masse, Cours de l'Ecole Centrale de Paris.

FAVRE MARINET M.: Cours de Convection Thermique, ENSHMG.

EYGLUNENT B., Manuel de thermique, Hermes.

SOLLIEC C., VIAZZO S. : Cours d'Echanges Thermiques de l'Ecole des Mines de Nantes