

Hydraulique Maritime

Julien Chauchat

MDC - LEGI UMR 5519 - GINP / ENSE3

julien.chauchat@univ-grenoble-alpes.fr

HOE - 2022/2023

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - Élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Introduction

Domaine Océanographique (Ocean)

Océanographie

- Pourquoi ?
- Où ?

Génie Océanographique

- Comment ?

Hydraulique Maritime \in Génie Océanographique

- Hydraulique : branche de la physique qui étudie les liquides sous pression. Le mot hydraulique vient du mot grec hydraulikos qui signifie orgue à eau et qui dérive à son tour de eau et de tuyaux.
- Maritime : Désigne une grande étendue d'eau salée (océans, mers fermées ou ouvertes et les grands lacs salés). En droit international, on appelle "mer" l'espace situé au-delà de la laisse de basse mer. La mer comprend: le fond marin et son sous-sol, la colonne d'eau et la surface, l'espace aérien surjacent.

Science qui étudie le mouvement de l'eau (trait de côte \rightarrow plateau continental)

Introduction

Physique

Hydraulique

Mécanique des
fluides

Hydrodynamique

Hydraulique Maritime

Probabilités

Océanographie

Turbulence

Mathématiques
Appliquées

- Pluri-disciplinarités
- Complément du Génie Civil sur l'eau
(contraintes exercé sur les constructions off-shore et côtières)

Le littoral : Vulnérabilité et enjeux

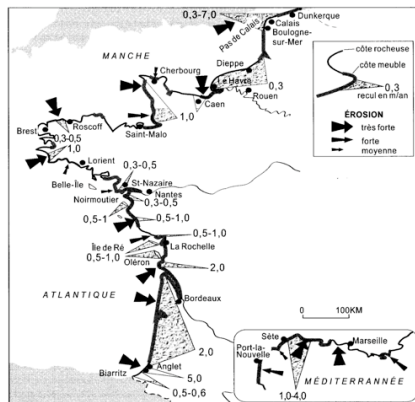
France et outre mer :

- 6959 km d'espace côtier
- 1925 km de plages
- 400 km protégées
- 23% du littoral métropolitain en érosion
- 48% des plages en érosion : 1.5 m/an

Le littoral c'est :

- 40% de la capacité d'hébergement touristique française (7 millions de lits)
- 6 millions de personnes en permanence (+ forte densité)
- 30 millions par an
- 25% du territoire dans les premiers 500m sont artificialisés/urbanisés

→ même constat à l'échelle mondiale



Le littoral : Vulnérabilité et enjeux

Le milieu marin subit de forte pression anthropique¹ et regroupe une part considérable

→ de la population mondiale

- 60%
- densité = 5xDensité moyenne des terres habitées
- 8/10 des plus grandes agglomérations

→ de l'activité économique mondiale

→ des ressources naturelles

- Nourriture
- Matières premières
- Energie, ...

De plus l'accélération du réchauffement climatique devrait avoir des répercussions sur l'évolution de cet espace dans les prochaines décennies.

- une élévation du niveau moyen de la mer (≈ 27 cm d'ici à 2100)
- Augmentation de la fréquence et de l'intensité des tempêtes

¹de la part de l'Homme

Spectre schématique des Ondes à la surface de l'Océan (Kinsman, 1965)

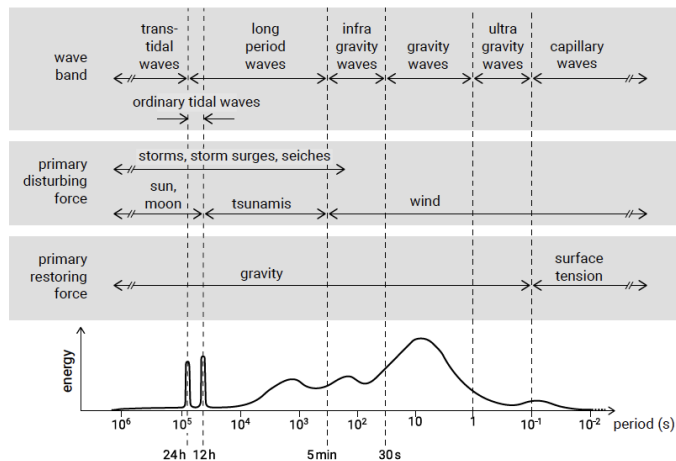


Figure 3.2: Sketch of the relative amounts of energy as a function of wave period in ocean waves. The top line gives the classification based on wavelength, the line below the classification based on the wave-generating force, and the bottom line the classification based on the restoring force. After Munk (1950) and Kinsman (1965).

source : Bosboom and Stive (2020)

Classification des vagues

On distingue deux grandes classes de vagues :

- les ondes longues ou eau peu profonde $\Leftrightarrow h/L \ll 1$ (faible profondeur relative)
- les ondes courtes ou eau profonde $\Leftrightarrow h/L \gg 1$ (typiquement la houle)

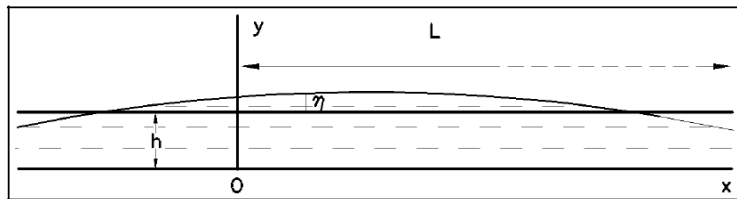


Figure II-5-1. Long wave geometry (Milne-Thompson 1960)

On suppose également que les ondes longues sont :

- de faible amplitude : $\eta/h \ll 1$
- de faible cambrure : $\frac{d\eta}{dx} \ll 1$

Les ondes longues ne sont pas forcément rencontrées en eau peu profonde, exemples :

- La marée dans l'océan : $L \# 10^6 m, h \# 10^3 m \Rightarrow h/L \# 10^{-3}$
- Les tsunamis dans l'océan pacifique : $L \# 10^8 m, h \# 10^4 m \Rightarrow h/L \# 10^{-4}$

Objectifs du cours

Initiation à la dynamique de la zone littorale

1. Modélisation de la houle → *cette partie du cours ...*

- analyse des niveaux de l'océan
- comprendre la génération des états de mer
- maîtriser la propagation de la houle, leur réfraction, diffraction et réflexion en zone littorale

2. Hydrodynamique sédimentaire → *cours de Pierre-Georges Anquetin*

- Connaître les principaux systèmes morphologiques littoraux
- Analyser les impacts sédimentaires à long terme des ouvrages littoraux
- Dimensionner les ouvrages de protection du littoral

Point de vue de l'ingénieur

Dimensionner un ouvrage en zone côtière ou littorale

→ ports, digues, brises lames, plateformes offshore, ...

Questions :

- **Quel est le niveau moyen de la mer et son évolution temporelle au droit de l'ouvrage ?**
 - Influence de la marée
 - Surcotes dues aux ondes de tempêtes et aux basses pressions
 - Anticiper l'augmentation du niveau moyen des océans
- **Quel est la taille des vagues qui vont impacter l'ouvrage ?**
 - Climat de houle local à partir de mesures
 - Climat de houle au large + propagation vers la côtes
- **Quel est l'effort subit par l'ouvrage ?**

Les différentes échelles spatiales

- **Evolution du niveau moyen de l'océan**

- Petite échelle : marée, surcôtes, tsunami, ...
- Grande échelle spatio-temporelle

- **Génération de la houle au large (océan)**

- Description probabiliste
- Prédiction des états de mer



Les différentes échelles spatiales

- **Evolution du niveau moyen de l'océan**

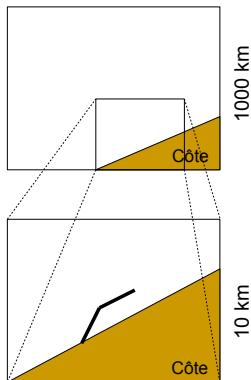
- Petite échelle : marée, surcôtes, tsunami, ...
- Grande échelle spatio-temporelle

- **Génération de la houle au large (océan)**

- Description probabiliste
- Prédiction des états de mer

- **Propagation de la houle vers la côte**

- Propagation en eau profonde (modèle linéaire)
- Evolution à l'approche des côtes :
refraction, diffraction, reflexion, levée



Les différentes échelles spatiales

- **Evolution du niveau moyen de l'océan**

- Petite échelle : marée, surcôtes, tsunami, ...
- Grande échelle spatio-temporelle

- **Génération de la houle au large (océan)**

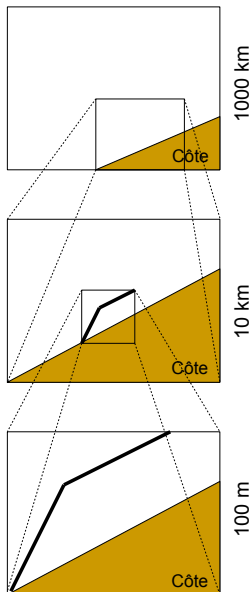
- Description probabiliste
- Prédiction des états de mer

- **Propagation de la houle vers la côte**

- Propagation en eau profonde (modèle linéaire)
- Evolution à l'approche des côtes :
refraction, diffraction, reflexion, levée

- **Impact des vagues sur l'ouvrage**

- Vagues non-déferlées, déferlantes ou déferlées.



Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - Élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Les niveaux marins

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux ondes longues et aux variations de niveau de l'océan à grandes échelles spatiales et temporelles. Nous aborderons successivement :

- La marée,
- Les surcôtes et les ondes de tempêtes,
- L'élévation du niveau moyen,

et les impacts liés au changement de niveau moyen sur l'érosion côtière, la submersion marine et les infrastructures portuaires.

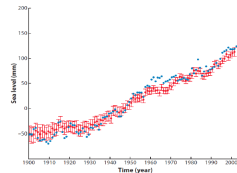
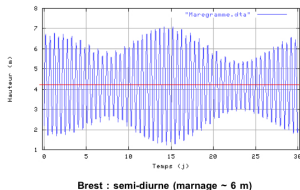


Figure II.3. Évolution récente du niveau moyen global des océans, estimée à partir des données marégraphiques sur le XX^e siècle. Les points rouges (+ barre d'erreur) représentent les estimations de Church et al. (2004), les points bleus celles de Jorjajeva et al. (2006). D'après Cazeneuve et Llovel (2010).

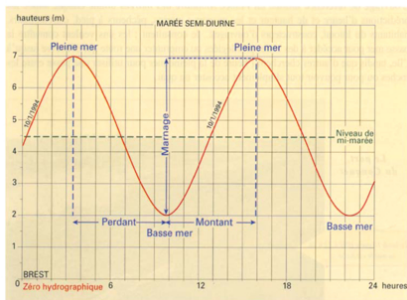
- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

La marée : Introduction

La marée est un phénomène qui a de multiples implications pour l'Homme :

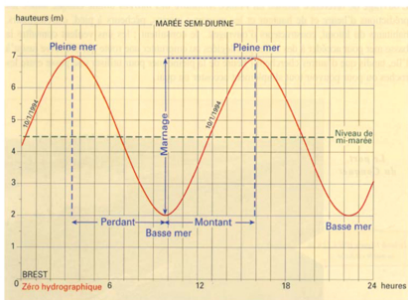
- **Navigation** : accès aux ports et aux fleuves, courants de marée, ...
- **Génie côtiers** : construction offshore, aménagements portuaires et côtiers, ...
- **Ecologie** : restauration d'habitats naturels, dispersion polluants et faunes, ...
- **Océanographie** : Rôle du mélange des eaux douces/eaux salées (circulation générale, changement climatique, ...)
- **Pêche** : zone de pêche, pêche à pieds, ...
- **Sports nautiques** : plongée, surf, ...

La marée : Définitions



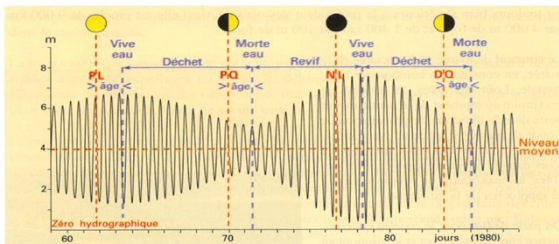
- **Pleine Mer (PM)** : Niveau maxi
- **Basse Mer (BM)** : Niveau mini
- **Etale** : Période où le niveau d'eau est constant
- **Perdant** : marée descendante
- **Montant** : marée montante
- **Marnage** : \neq de niveau entre PM et BM
- **Zéro hydrographique** : niveau des plus basses mers astronomiques
- **Flot** : Courants associés à la marée montante
- **Jusant** : Courants associés à la marée descendante

La marée : Définitions

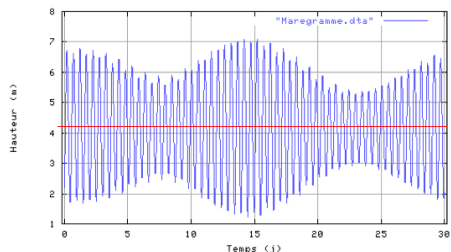


- **Vive Eau (VE)** : Lorsque le marnage passe par un maximum
- **Morte Eau (ME)** : Lorsque le marnage passe par un minimum
- **Déchét** : Lorsque l'amplitude de la marée diminue
- **Revif** : Lorsque l'amplitude de la marée augmente
- **Inégalité journalière**

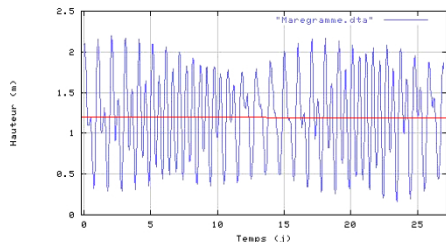
- **Pleine Mer (PM)** : Niveau maxi
- **Basse Mer (BM)** : Niveau mini
- **Etale** : Période où le niveau d'eau est constant
- **Perdant** : marée descendante
- **Montant** : marée montante
- **Marnage** : \neq de niveau entre PM et BM
- **Zéro hydrographique** : niveau des plus basses mers astronomiques
- **Flot** : Courants associés à la marée montante
- **Jusant** : Courants associés à la marée descendante



La marée : Marégrammes



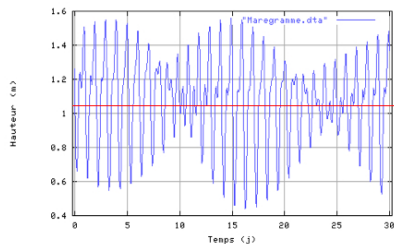
Brest : semi-diurne (marnage ~ 6 m)



Punta Arenas : mixte (marnage ~ 2 m)

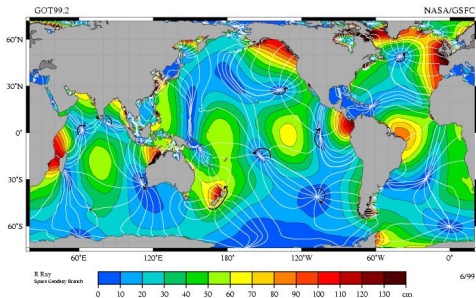
Il existe des marées :

- **Semi-Diurnes** : période 12h25min
→ 2 cycles / jour
- **Diurnes** : période 24h50min
→ 1 cycle / jour
- **Mixtes** : alternance marées diurnes / semi-diurnes



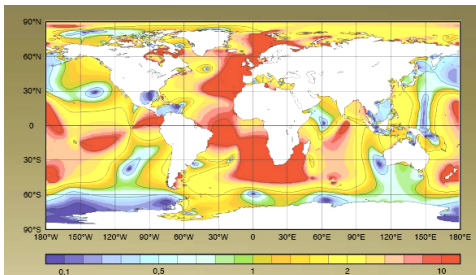
Da-Nang : marée diurne (marnage ~ 1 m)

La marée : Répartition spatiale à l'échelle terrestre



Amplitude de la composante Semi-Diurne de la marée

- **Lignes cotidales :**
Lieu des points où la pleine mer se produit au même instant
- **Point amphidromique :**
Lieu de rencontre des lignes cotidales où la variation d'amplitude est faible



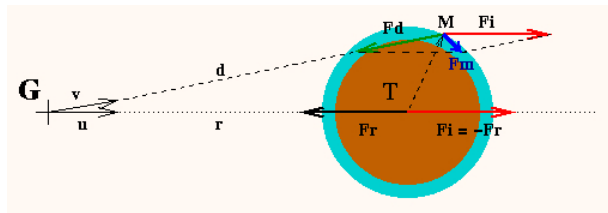
Comparaison entre marées semi-diurnes et diurnes dans le monde. Les zones en bleu/violet correspondent à des marées diurnes dominantes, alors que les zones en jaune/rouge sont semi-diurnes.

Type de Marée

- bleu / Violet : Marées diurnes dominantes
- Jaune / Rouge : Marées Semi-diurnes dominantes

La marée : Description et origine

La marée est un **mouvement oscillatoire** de **basse fréquence** ($f_m \approx 10^{-5} \text{ Hz}$) de la surface de la mer **engendrée** principalement par l'**attraction** de la **lune** et du **soleil** sur les particules fluides de l'océan.



Source : SHOM

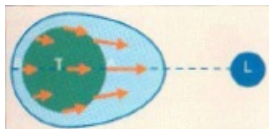
La force génératrice de la marée est la résultante de deux forces :

- la **force d'attraction gravitationnelle exercée par l'astre** F_d , proportionnellement à sa masse et en raison inverse du carré de sa distance
- la **force centrifuge identique en tout point de la Terre** F_i , due au mouvement de la Terre sur son orbite autour du centre de gravité du système Terre-astre.

La marée : Théorie Statique

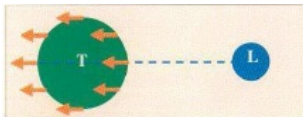
Théorie statique (Newton, 1687)

- Terre sphérique recouverte d'une couche d'eau liquide uniforme
- La surface des mers est à tout instant en équilibre sous l'action des forces gravitationnelles exercée par la lune et le soleil et de la force centrifuge.



Force d'attraction gravitationnelle : \vec{F}_a de l'astre (m') sur les masses d'eau (M)

$$\vec{F}_a = -G \frac{M m'}{l^2} \vec{e}_{T-L}$$



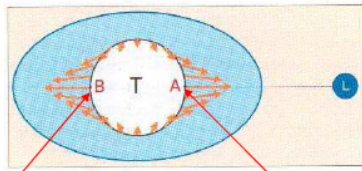
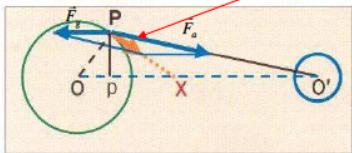
Force "centrifuge" due au mouvement de rotation du système binaire Terre-astre

Cette force équilibre l'attraction que la lune exerce sur la terre au centre de masse de celle-ci.

$$\Rightarrow \vec{F}_g = G \frac{M m'}{d^2} \vec{e}_{T-L}$$

La marée : Théorie Statique

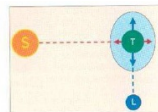
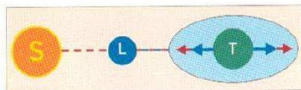
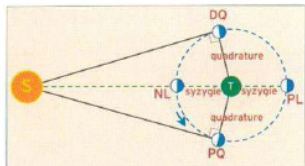
Combinaison F_a et $F_g \rightarrow$ *force de marée*



$F_g > F_a$

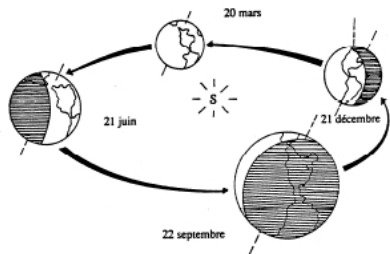
$F_g < F_a$

En fonction des phase de la Lune, les marées sont de mortes eaux pour les PQ et DQ (quadrature) et de vives eaux pour les NL et PL (syzygie)



La marée : Théorie Statique

La rotation de la terre autour du soleil et la déclinaison (Angle d'inclinaison de l'axe de rotation) joue un rôle également



⇒ L'attraction du soleil est maximale quand il est dans le plan de l'équateur : déclinaison = 0 (équinoxes)

$A_{calculé}^{max} \approx 51\text{cm} \neq A_{obs}^{max} \approx 17\text{m}$ (Canada), 15m Mt-St-Michel

⇒ **Théorie insuffisante**

La théorie statique néglige :

- Inertie des masses d'eau
- La présence des continents
- Le frottement sur le fond des océans

La marée : Théorie Statique

Explication sur l'inégalité journalière

→ Le gonflement dû à la lune est incliné par rapport à l'équateur terrestre

→ Un même point sur la face côté lune présente une amplitude de marée plus importante que sur la face opposée.

→ Un point symétrique dans l'hémisphère sud du point II ou III présenterais la même amplitude de marée.

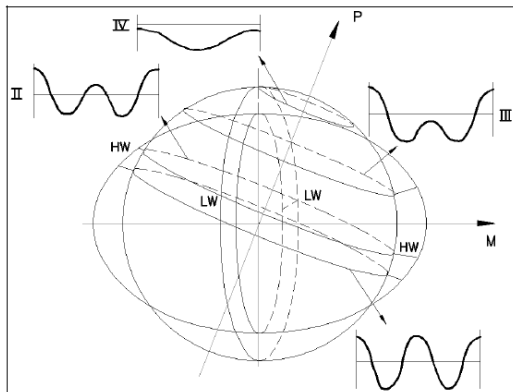


Figure II-5-7. The daily inequality (Dronkers 1964)

- I A l'équateur : marées identiques des deux cotés \Rightarrow pas d'inégalité journalière
- II Aux tropiques : Marée haute côté lune plus forte
- III Latitudes moyennes \Rightarrow inégalité journalière plus marqué
- IV Aux pôles \Rightarrow une seule marée par jour

La marée : Théorie Dynamique

- **Principe des oscillations forcées**

Une force perturbatrice périodique engendre un mouvement périodique de même période.

- **Principe de superposition des petits mouvements**

"le mouvement total d'un système soumis à de très petites forces est la somme des mouvements partiels que chaque force lui imprime", P.S. Laplace.

Une force périodique fait naître une oscillation de même période et engendre des oscillations dont les périodes sont des sous multiples de l'oscillation fondamentale.

- **Théorie dynamique des marées**

Résolution des équations du mouvement du fluide pour une couche de fluide mince sur une sphère tournante et soumis à l'action des forces perturbatrices astrales.

Marée due à la propagation d'une onde

- Plusieurs composantes (Lune / Soleil)
- Déviée par la rotation de la terre sur elle-même (forces de Coriolis)
- Bloquée par la présence des continents
- Freinée par le frottement sur le fond
- Parfois amplifiée par résonance (forme géométrique des bassins)

Mais système trop complexe à résoudre pour servir de prédiction

La marée : Analyse harmonique - approche pragmatique

On peut décomposer le signal de marée comme une somme d'onde sinusoïdale dont les fréquences sont choisies parmi les fréquences constituantes de la marée :

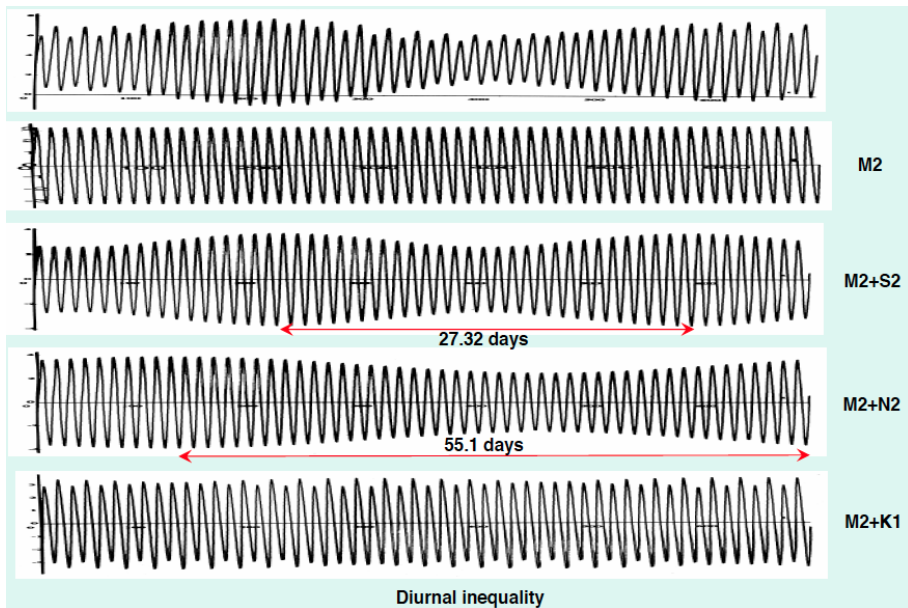
$$h(t) = h_0 + \sum_{p=1}^M H_p \cos(2 \pi f_p t + \phi_p)$$

où h_0 désigne le niveau moyen en un lieu donné. L'amplitude H_p et la phase ϕ_p de chaque composante sont déterminés à partir d'un fit sur des séries temporelles mesurées en un lieu donné.

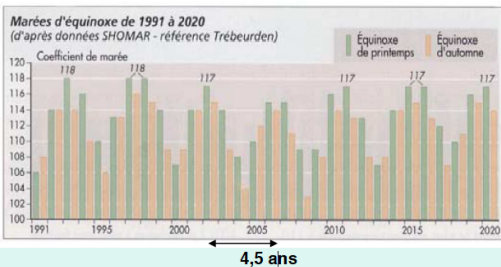
Nom	Cause	Période
Semi-diurnes		
M2	Principale lunaire	12 h 25 min
S2	Principale solaire	12 h 00 min
N2	Majeure lunaire elliptique	12 h 40 min
K2	Déclinaison luni-solaire	11 h 58 min
Diurnes		
O1	Principale lunaire	25 h 49 min
K1	Déclinaison luni-solaire	23 h 56 min
P1	Principale solaire	24 h 04 min
Q1	Majeure lunaire elliptique	26 h 52 min

Cette approche est couramment utilisé par les services hydrographiques (SHOM en France) pour la prédiction des hauteurs d'eau dans les ports et les embouchures de fleuves.

La marée : Analyse harmonique

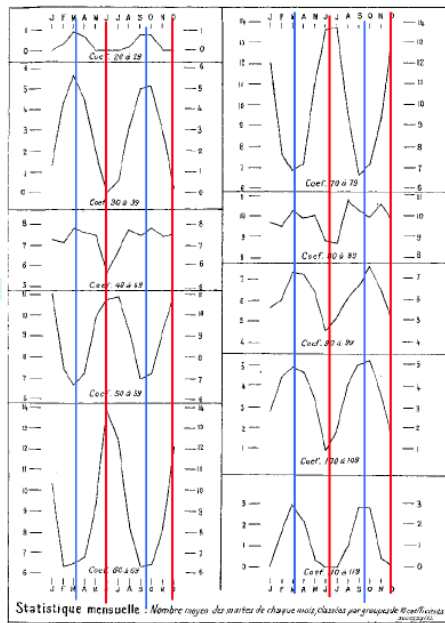


La marée : Analyse statistique



- On observe une variation pluriannuelle avec une période d'environ 4,5 ans
- On observe une variation saisonnière
 - deux pics de faibles et forts coefficients aux équinoxes (mars et septembre)
 - deux pics de coefficients moyens aux solstices (juin et décembre)

Coefficient de marée : $C = 100 \times \text{marnage} / 2U_h$
 $2U_h = \text{marnage moyen des marées de vive-eau voisines des équinoxes (21 mars, 21 septembre).}$



- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - **Les surcôtes**
 - Élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Les surcôtes

Surcôtes = surélévations temporaires du niveau de la mer lors de tempêtes ou de cyclones. Les surcotes marines peuvent être induites par deux mécanismes physiques différents :

- La **surcote atmosphérique** liée au passage d'un système dépressionnaire (cyclone, ouragan, tempête)
 - La **chute de pression atmosphérique** entraîne une surélévation du niveau du plan d'eau : $\Delta P = 1 \text{ hPa} \leftrightarrow \Delta h = 1 \text{ cm}$
 - Le **vent génère des courants dans les masses d'eau superficielles**. Ces masses d'eau poussées par les courants vers la côte peuvent s'accumuler et induire une élévation du niveau marin.
- La **surcote associée aux vagues** : surélévation moyenne du plan d'eau induite par le déferlement des vagues (« wave setup »). Cette élévation peut atteindre plusieurs dizaines de centimètres.

Par simplification, l'altitude maximale du plan d'eau atteinte au cours d'une tempête peut être calculé en sommant ces contributions. Le niveau instantané dépend également du jet-de-rive (swash = flux/reflux des vagues sur la plage). Le run-up correspond à la cote maximale atteinte par la mer au-dessus de son niveau de référence.

Source : <http://observatoire-littoral-cdc-iledere.fr/?q=content/submersion>

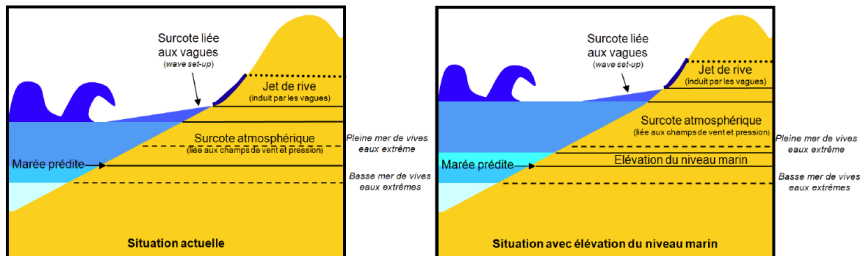


Figure IV.4 : Principaux phénomènes physiques contrôlant le niveau d'eau ; ce schéma n'est pas à l'échelle (Yates-Michelin et al. 2011)

- La surcôte atmosphérique et celle liée aux vagues interagissent de manière non-linéaire, les effets ne s'additionnent pas forcément.
- L'influence d'une élévation du niveau moyen pourrait entraîner des surcotes plus importante que la simple addition des effets.
- La dynamique de la zone de jet de rive (swash en anglais) sera également déterminante dans la submersion puisqu'elle control la dynamique du trait de côte.

Vous devez être conscient que ces problèmes sont complexes et que la plupart d'entre eux sont des sujets de recherche actuels.

Les submersions marines

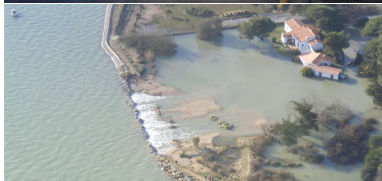
Lors des tempêtes, la submersion marine peut se produire de 3 façons (CETMEF, 2009) :



- Par surverse lorsque le niveau marin moyen est supérieur à cote d'arase des ouvrages.



- Par franchissement lorsque des paquets de mer (projection de gerbes d'eau causées par le déferlement des vagues) se rependent de manière répétée en arrière des ouvrages.



- Par rupture d'un ouvrage côtier ou d'une défense naturelle faisant office de digue.

Source : <http://observatoire-littoral-cdc-iledere.fr/?q=content/submersion>

La tempête Xynthia

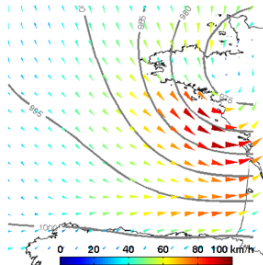
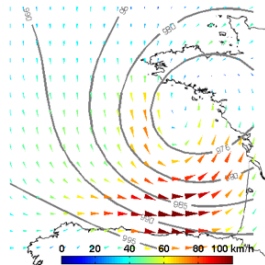
La **tempête Xynthia**, qui a touché les côtes atlantiques françaises dans la nuit du 27 au 28 février 2010, a été à l'origine de phénomènes de submersion et d'érosion d'une rare intensité \Rightarrow **59 morts / 2 milliards d'euros de dommages.**

Coincidence du passage de la tempête avec

- pleine mer de vive-eau (coefficient 102)
- fortes houles ($H_s = 6 - 7$ m),

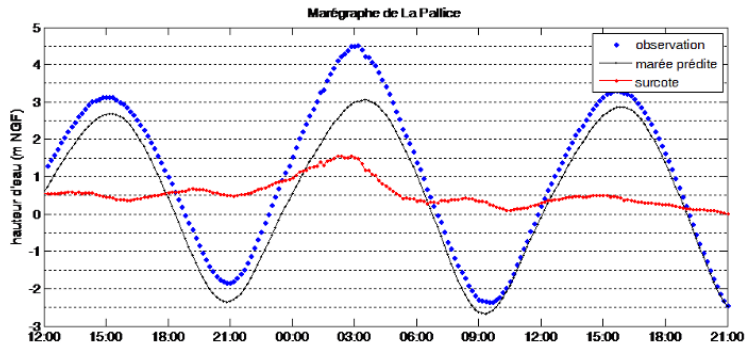
\Rightarrow surcote de l'ordre de 1,50 m et niveau d'eau de +4.51 m NGF à La Rochelle (période de retour > 100 ans).

Surcote atmosphérique



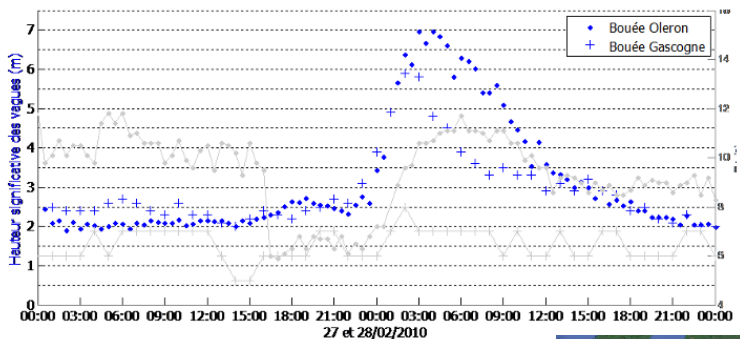
- $U_{max} = 114$ km/h ($Tr=173$ ans)
 \rightarrow entre 0h et 3h TU
 \rightarrow secteur Sud puis Ouest
- $P_{min} = 969$ hPa
 \Rightarrow surcote 0.5 m
- onde de tempête
 \Rightarrow 10-20% surcote au large

La tempête Xynthia: Niveaux d'eaux



- Concomitance PM / surcote
⇒ phénomène exceptionnel / importance des probabilités croisées
- Surcote totale : 1.5m à La Rochelle ($Tr=200-250$ ans)

La tempête Xynthia: Vagues



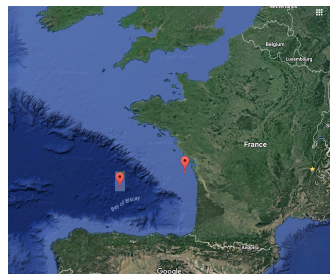
- Vent de sud

⇒ mer courte : $H_s = 6 - 7$ m et $T_p = 7 - 10$ s

⇒ Rugosité k_s augmente

⇒ Contrainte transmise par le vent augmente

- Vagues à la côte $>$ vagues au large ($Tr=1$ an)



- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - **Élévation du niveau moyen**
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Variations passées du niveau de la mer

Echelle de temps géologiques → tectonique des plaques

10^3 - 10^5 ans → cycles astronomiques (périodes glaciaires/interglaciaires)

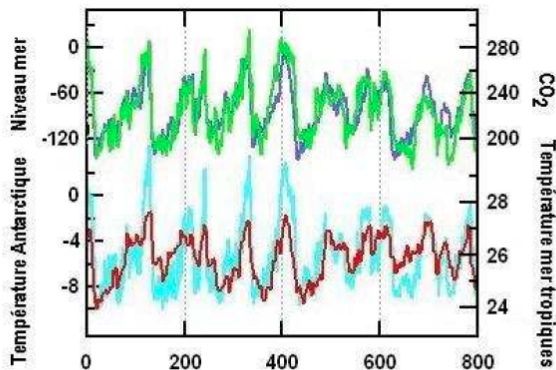
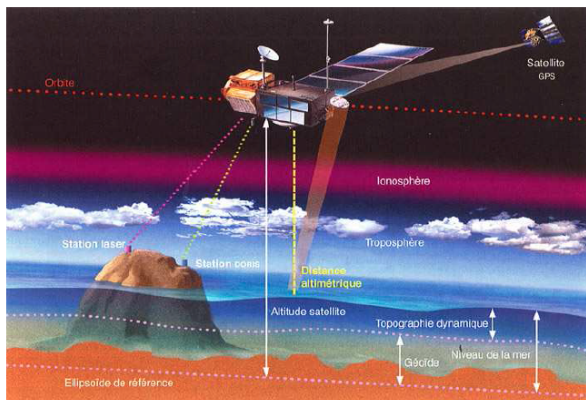


Figure II.1. Reconstruction des évolutions passées du niveau moyen global des océans (en bleu foncé), de la concentration de CO₂ dans l'atmosphère (en vert), de la température au dôme Concordia sur l'Antarctique (en bleu clair) et de la température de la surface de la mer dans les tropiques (en rouge). D'après Jouzel et Masson-Delmotte (2010).

Observations du niveau moyen de la mer

XXe et XXIe siècle → 2 moyens d'observation :

- **marégraphes** → mesure relative du niveau de la mer / croûte terrestre
⇒ composante climatique du niveau de la mer nécessite une correction de la mesure marégraphique
- **altimétrie satellitaire** → mesure absolue / ellipsoïde de référence
⇒ composante climatique du niveau de la mer.



Évolution récente du niveau moyen des océans

A l'échelle planétaire, entre 1901 et 2009

→ Taux d'élévation moyenne de $1,7 \pm 0,2$ mm/an

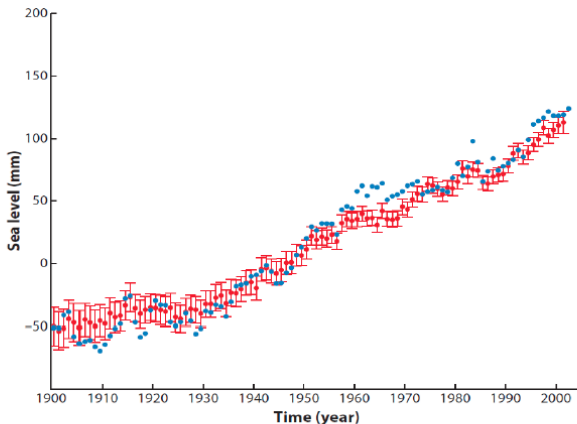


Figure II.3. Évolution récente du niveau moyen global des océans, estimée à partir des données marégraphiques sur le XX^e siècle. Les points rouges (+ barre d'erreur) représentent les estimations de Church et al. (2004), les points bleus celles de Jevrejeva et al. (2006). D'après Cazenave et Llovel (2010).

Évolution récente du niveau moyen des océans

A l'échelle planétaire, depuis le début des années 90

→ Taux d'élévation moyenne de $3,2 \pm 0,4$ mm/an

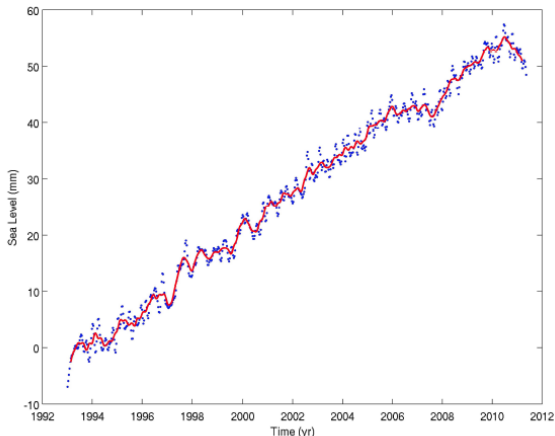


Figure II.4. Évolution récente du niveau moyen global des océans, estimée à partir des données altimétriques sur les deux dernières décennies. Le cycle annuel a été enlevé, les points bleus représentent des données sur 10 jours, la ligne rouge est une moyenne glissante sur 4 mois. Mise à jour de Cazenave et Llovel (2010).

Évolution récente du niveau moyen des océans

D'après le rapport IPCC 2007, il existe deux sources majeures permettant d'expliquer l'élévation récente:

- l'expansion thermique des océans due à leur réchauffement causé par la hausse des températures moyennes des basses couches de l'atmosphère (effet stérique).
- l'augmentation du contenu en eau des océans (apport due à la fonte des glaciers de montagne et des calottes polaires (inlandsis Groenlandais et antarctique)

Élévation du niveau de la mer (mm/an)			
Source	1961-2003	1993-2003	2003-2009
Expansion thermique	0,42 ± 0,12	1,60 ± 0,50	0,62 ± 0,40
Glaciers continentaux	0,50 ± 0,18	0,77 ± 0,22	1,15 ± 0,37
Groenland	0,14 ± 0,41	0,21 ± 0,07	0,60 ± 0,05
Antarctique	0,05 ± 0,12	0,21 ± 0,35	0,50 ± 0,05
Modifications du cycle hydrologique			-0,22 ± 0,05
Somme	1,10 ± 0,50	2,80 ± 0,70	2,65 ± 0,55
Observations	1,80 ± 0,50	3,10 ± 0,70	2,70 ± 0,40
Différence (observations - somme)	0,70 ± 0,70	0,30 ± 1,00	0,05 ± 0,68

Tableau II.1. Estimations des principales contributions à la variation du niveau moyen global des océans, pour la période 1961-2003 (marégraphes, IPCC 2007), la période 1993-2003 (altimètres, IPCC 2007) et la période 2003-2009 (GRACE, Llovel 2010). La somme de ces contributions est comparée aux observations des variations du niveau de la mer. Les incertitudes pour les sommes sont calculées en combinant les diverses incertitudes (racine de la somme des incertitudes au carré).

Évolution récente du niveau moyen des océans

Il existe une forte disparité régionale,

→ le niveau augmente sur la majorité des océans du globe sauf dans l'Est du Pacifique Nord et équatorial.

→ l'augmentation du contenu en eau des océans lié aux apports dû à la fonte des glaciers de montagne et des calottes polaires (inlandsis Groenlandais et antarctique)

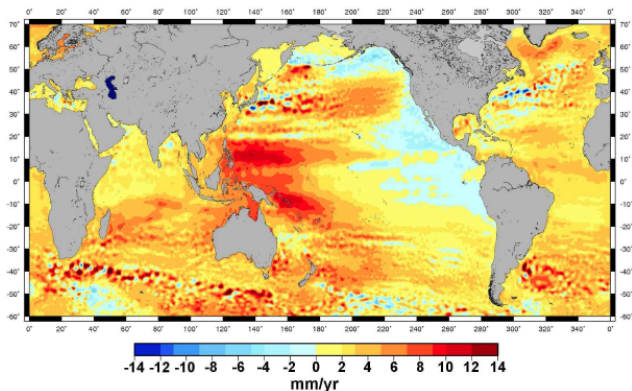


Figure II.5. Carte globale de la distribution géographique des vitesses de variation du niveau de la mer (1993-2011) d'après Topex/Poseidon, Jason-1 et Jason-2.

Source :LEGOS

Évolution récente du niveau moyen des océans

A l'échelle de la France,

→ l'augmentation se fait à un rythme moins élevé que la moyenne globale: ≈ 2 mm/an entre 1993 et 2010.

→ l'augmentation en Méditerranée est plus faible que sur les côtes atlantiques

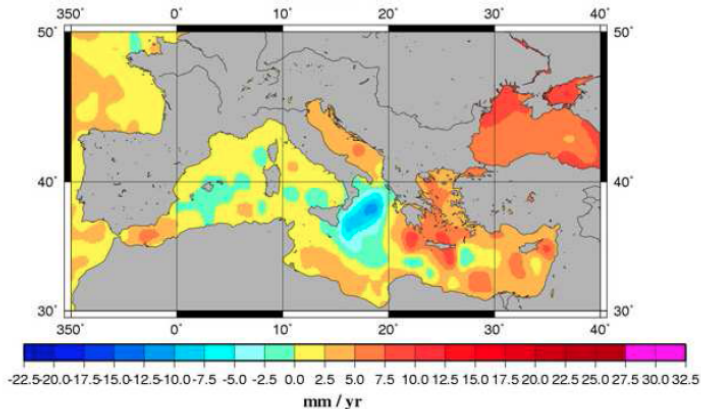
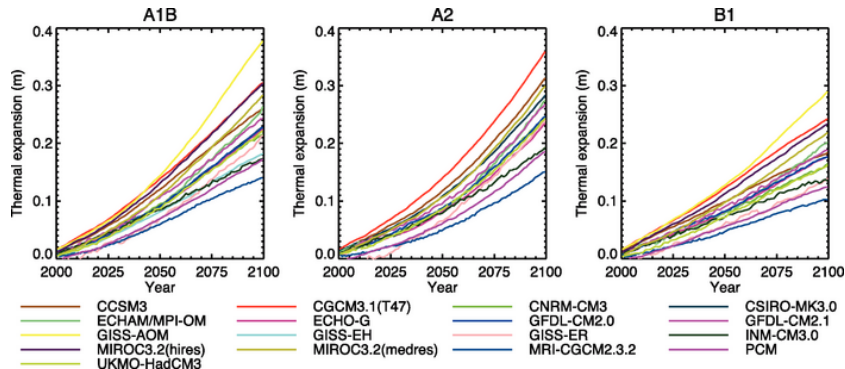


Figure II.6. Carte de la distribution géographique des vitesses de variation du niveau de la mer (1993-2007) d'après Topex/Poseidon et Jason-1 : Zoom sur la Méditerranée.
Source :LEGOS.

Projections du niveau de la mer

Chaque courbe représente une simulation avec un modèle "système terre" c'est à dire un modèle océanographique couplé avec un modèle atmosphérique et un modèle surface continentale.

	More economic focus	More environmental focus
Globalisation	A1 rapid economic growth (groups: A1T; A1B; A1FI)	B1 global environmental sustainability
Regionalisation	A2 regionally oriented economic development	B2 local environmental sustainability



Projected global average sea level rise (m) due to thermal expansion during the 21st century relative to 1980 to 1999 under SRES scenarios A1B, A2 and B1.

source : *IPCC AR4 (2007)*

Projections du niveau de la mer

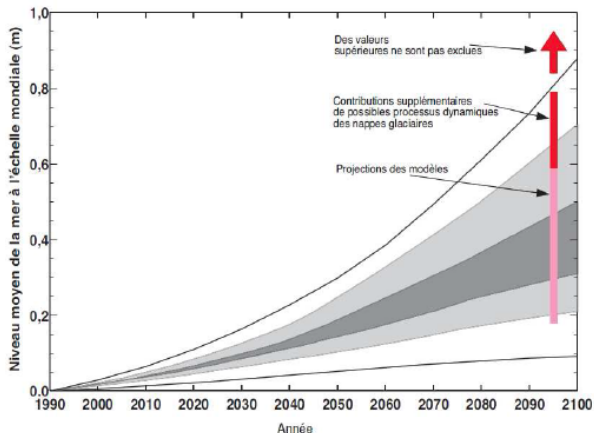


Figure III.1 Projections de l'élévation du niveau moyen global de la mer au XXI^e siècle. Les lignes et les grisés montrent l'élévation moyenne pour la période 1991-2100, d'après le rapport d'évaluation du GIEC (IPCC 2001) (le grisé sombre est la fourchette de la moyenne des modèles pour la gamme de scénarios d'émission des gaz à effet de serre considérée, le grisé clair induit tous les modèles et tous les scénarios et les lignes extérieures comprennent une incertitude supplémentaire pour la glace de terre). Les projections du quatrième rapport d'évaluation de 2007 (coefficient de confiance 90%) sont représentées par les barres de 2095, la barre magenta étant la gamme des projections et la rouge une gamme étendue tenant compte de l'effet additionnel, possible mais mal quantifié, d'une réponse dynamique rapide des inlandsis du Groenland et de l'Antarctique

Projections du niveau de la mer

→ Forte incertitudes sur la contribution de l'écoulement des inlandsis du Groenland et de l'Antarctique

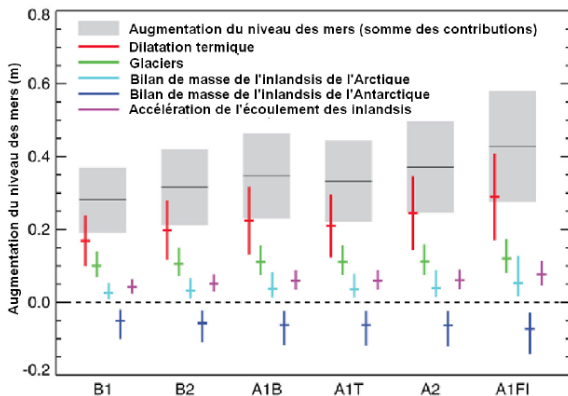


Figure III.2 Projections de l'élévation du niveau moyen global de la mer et différentes contributions à cette élévation (en mètres pour 2090-2099 par rapport à 1980-1999) selon six scénarios d'émission. Source : IPCC 2007, 4^e rapport, bases physiques, figure TS27.

Projections du niveau de la mer

Répartition spatiale non-homogène

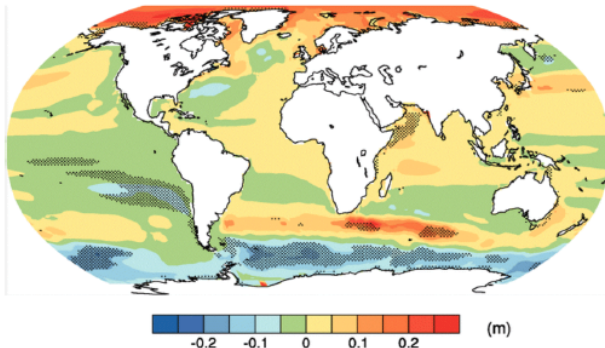


Figure III.3 Élévation du niveau de la mer relative à la moyenne globale pour la période 2080-2099 par rapport à 1980-1999. Les calculs prennent en compte les changements de température, salinité et courants simulés par 16 modèles du GIEC forcés avec le scénario A1B. Les zones en pointillées indiquent les régions pour lesquelles les modèles sont en bon accord.

Projections du niveau de la mer

Le niveau de la mer suit actuellement la partie haute des projections

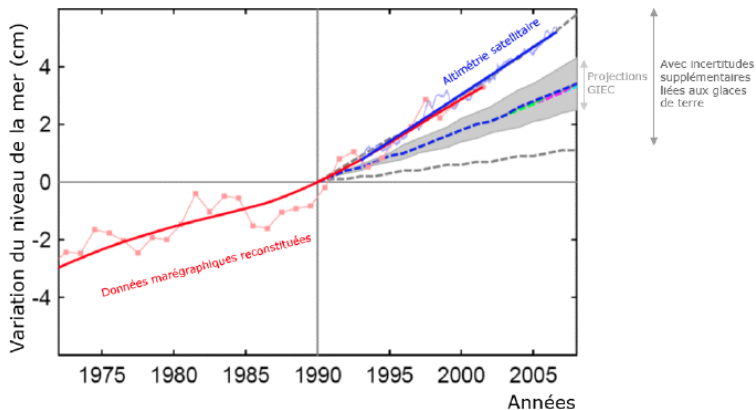


Figure III.4 Élévation du niveau de la mer observée par des marégraphes et des altimètres satellitaires, comparée aux projections du troisième rapport d'évaluation. Les données viennent principalement de marégraphes (annuelles, en rouge) et d'altimètres satellitaires (trimestrielles, en bleu, jusqu'à la mi-2006). D'après une figure de Rahmstorf et al. 2007 et http://www.pik-potsdam.de/~stefan/material/observations_vs_projections.ppt.

Projections du niveau de la mer

A l'échelle globale, la mer va continuer de monter pendant des siècles

→ dilatation thermique de l'océan à long terme

→ au-delà d'un certain seuil de réchauffement ($\approx 3,1 \pm 0,8^\circ$ / pre-indust.) l'inlandsis Groenlandais pourrait fondre en quasi-totalité

A l'échelle des côtes françaises,

→ la distribution régionale du changement de niveau de la mer est difficile à estimer.

→ la forte dispersion des modèles traduit l'importante incertitude des résultats pour une région donnée

→ Une étude de l'évolution du niveau de la mer au niveau des côtes françaises (métropole et DOM-COM) prenant en compte l'ensemble des processus, y compris ceux qui influencent la morphologie des côtes, reste à réaliser.

Impacts sur l'érosion côtière

L'érosion du trait de côte est l'un des aléas qui s'exerce sur les zones littorales. Elle induit trois types de risques :

- ❶ la perte de terrain
- ❷ la fragilisation par érosion de défenses côtières naturelles (ex. dunes) ou artificielles (ex. digues en terre) pouvant parfois entraîner une rupture
- ❸ la sape d'ouvrages de protection par affouillement.

Ces risques seront potentiellement aggravés par l'élévation du niveau marin.



Soulac-sur-mer, Aquitaine



Sarzeau, Bretagne



Wissant, Côte d'opale

Rapports climat de la France au XXIe siècle. Volume 3 : Evolution du niveau de la mer - février 2012

Impacts sur l'érosion côtière: Situation actuelle

→ Une érosion préoccupante due à de nombreux facteurs

Le littoral est un système dynamique dont la morphologie évolue à différentes échelles temporelles et spatiales en réponse à un grand nombre de facteurs :

- Le climat et les processus hydrométéorologiques marins
→ *variations du niveau marin, vents, vagues, courants, tempêtes, ...*
- Les processus de géodynamique externe
→ *transport de sédiments, événements extrêmes, ...*
- Les processus de géodynamique interne
→ *tectonique, isostasie, volcanisme, ...*
- Les processus biologiques
→ *sédiments bioclastiques, vases, processus éoliens (dune).*
- Les processus anthropogéniques directs et indirects
→ *défenses côtières, rechargement de plages ; usage des sols à l'échelle des bassins versants, extractions de sédiments fluviaux et marins, travaux hydrauliques, urbanisation du littoral, subsidences liées à l'exploitation d'hydrocarbures ou d'aquifères côtiers.*

Mais il y a trop peu d'observations disponibles pour permettre d'analyser l'évolution pluri-décennale. Depuis les années 90, l'observatoire de la Côte d'Aquitaine fait un suivi à long terme...

Impacts sur l'érosion côtière

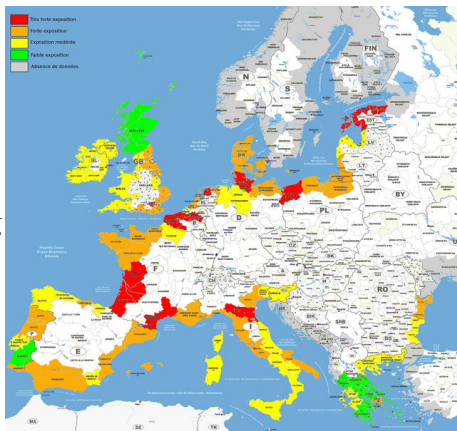
Tendances	Types géomorphologiques					
	Côtes rocheuses		Plages		Rivages limono-vaseux	
	%	km	%	km	%	km
Engraissement	NS	34	10,4	232	48,6	119
Stabilité	64,4	1216	45,8	1022	35,1	86
Erosion	23	436	41,4	924	11,8	29
Pas de données	10,6	200	2,3	52	4,5	11
Total	100	1886	100	2230	100	245

Tableau IV.2 : Tendances d'évolutions observées pour chacune des grandes classes morpho-sédimentologiques du littoral de France métropolitaine et de Corse (Données EuroSION, 2004).

A l'échelle Européenne

- 1 20% des côtes Européennes sont en érosion $\Rightarrow - 15 \text{ km}^2 / \text{an}$
- 2 Plages \Rightarrow érosion
- 3 Marais côtiers \Rightarrow accrétion (captage des sédiments fins par la végétation)

La majorité des côtes Européennes présentent un risque d'érosion modéré à très fort.



Impacts sur l'érosion côtière

Les impacts potentiels du changement climatique

Il est généralement admis que la crise érosive subie actuellement par les littoraux, et notamment par les plages, s'aggrave. L'aspect qui cause le plus d'inquiétude est la hausse future du niveau marin. Pourtant, l'impact de l'élévation du niveau marin demeure difficile à quantifier.

Les modélisations mathématiques ne sont pas en mesure de prendre en compte l'ensemble des processus morphodynamiques et elles ne peuvent répondre à la question de l'impact de l'élévation du niveau marin sur le trait de côte.

Les incertitudes associées aux impacts potentiels de l'élévation du niveau marin restent à améliorer et valider.

Le Monde, 22 novembre 2014

Les tempêtes ont fait reculer la côte aquitaine jusqu'à 40 mètres

"La nature n'est pas près de réparer les conséquences de l'épisode exceptionnel des huit fortes tempêtes qui ont frappé en un temps record le littoral d'Aquitaine pendant l'hiver 2013-2014. Non seulement la côte a globalement reculé de plus de 10 mètres et les plages se sont affaissées, s'érodant de 2 à 4 mètres, mais l'été suivant, les vagues n'ont pas rapporté de sable comme à l'ordinaire.

Résultat: la façade atlantique va devoir affronter les prochaines intempéries sans la protection de nombreuses dunes gommées par les « coups de cuiller » des vagues comme disent les experts.

De décembre 2013 à mars 2014, les tempêtes qui ont frappé la côte sur toute sa longueur ne se sont pas distinguées par des vagues record mais par une cadence si rapide que cet épisode est considéré comme historique. « L'énergie produite par la houle a été plus de deux fois supérieure à celle des hivers précédents. Nous n'avons rien trouvé de comparable dans notre base de données, qui existe pourtant depuis 1958 », témoigne Cyril Mallet, chef de projet littoral au Bureau de recherches géologiques et minières (BRGM) d'Aquitaine. Avec l'Office national des forêts (ONF), les experts du BRGM ont présenté jeudi 20 novembre, un bilan édifiant destiné d'abord à éclairer les collectivités locales dans leurs réflexions

Selon les relevés de l'été dernier, le trait de côte enregistre un recul de 5 à 20 mètres au lieu de 1 à 3 m habituellement, cette dernière donnée correspond à la moyenne mondiale. Le retrait atteint même parfois jusqu'à 40 m, comme à Soulac-sur-Mer en Gironde, où un immeuble se trouve désormais au bord de la falaise. « Nous travaillons à accompagner et ralentir l'évolution du littoral, pas à essayer de le fixer, précise Francis Maugard de l'ONF. Même avec l'intervention des agents pour planter des oyats et interdire le piétinement, il faut au moins cinq ans pour reconstituer une dune. Nous consacrons à ces efforts un budget de 500 000 euros par an. »

Plus d'un quart du littoral français subit une érosion sensible actuellement. La région Aquitaine particulièrement frappée va devoir s'adapter. 272 hectares abritant des campings, des zones d'activités économiques et surtout des habitations sont directement menacés. Dans la nuit de mercredi à jeudi, une femme a été emportée par une forte vague à Anglet, dans les Pyrénées-Atlantiques. Elle n'est pas la première ces dernières semaines.

Carlos Olivera, chargé des questions climatiques au BRGM, évite prudemment de se prononcer sur l'effet du réchauffement sur l'accentuation de la fréquence et de l'intensité des tempêtes. Mais la montée du niveau de la mer est, elle, incontestable, « de 20 cm depuis 1870 », rappelle-t-il et cette élévation accentue le phénomène d'avancée de la mer dans les terres.

Face aux risques accrus de submersion, les experts du BRGM préviennent que la France va devoir opérer un véritable « changement culturel ». En clair: il va falloir cesser de bétonner les côtes et «relocaliser» certaines constructions des communes littorales. D'autant que la densité de population y est 3 fois plus élevée que la moyenne nationale (5 fois en Méditerranée). Dans le sud-ouest, des communes vulnérables, comme Lacanau et la Teste-de-Buch en Gironde ainsi que Labenne dans les Landes y réfléchissent."



Martine Valo

Impacts sur la submersion marine

Conclusion

Le rapport de 2007 du GIEC (Nicholls et al. 2007) indique que l'**élévation du niveau moyen** de la mer, engendrera une **submersion permanente de zones basses** et que les **niveaux marins extrêmes actuels** seront **atteints plus fréquemment qu'aujourd'hui**. **Les effets locaux sont incertains** et dépendent de la géomorphologie littorale, de l'usage des sols et de la stratégie de défense côtière.

Parmi toutes les conséquences du changement climatique et en l'état des connaissances actuelles, **la remontée du niveau marin sera la cause principale d'aggravation de l'aléa de submersion**.

Les incertitudes importantes associées à la question de l'impact du changement climatique sur les aléas côtiers, mais aussi l'actualité de la question de notre **inadaptation aux aléas côtiers actuels**, ouvrent la perspective d'**actions « sans regrets »** : de telles actions, en **réduisant l'exposition et la vulnérabilité actuelle aux aléas côtiers**, ont un **bénéfice immédiat** et **constituent un premier pas vers une adaptation au changement climatique**.

Impacts sur les infrastructures portuaires

Les ouvrages de protection côtières et portuaires sont dimensionnés à partir des données de forçages météo-marins et des conditions géotechniques de fondation. Les sollicitations hydrauliques principales sont la houle incidente et le niveau d'eau. On peut penser que le changement climatique induira principalement deux effets à prendre en compte :

- la modification des houles au large (hauteur, période, intensité)
- l'augmentation du niveau de la mer (niveau moyen, surcôtes marines).

Il a été montré que : ↗ du niveau de la mer > ↗ des houles au large

Effets d'une élévation du niveau moyen :

- 1 déferlement plus proche des ouvrages, houles plus fortes et sollicitations plus sévères
- 2 stabilité réduite des enrochements et débits de franchissement plus forts.
- 3 effets importants : stabilité des ouvrages, exploitation portuaire ou protection des infrastructures.

Impacts sur les infrastructures portuaires

Règle de dimensionnement: (Sergent et al., 2010).

niveau d'eau moyen+1m $\Rightarrow H_{ouvrage}+2m$ en eau peu profonde

De manière générale, 3 axes se dégagent pour adapter les structures :

- limiter le franchissement (par exemple en modifiant le mur de couronnement) ;
- améliorer la stabilité de la carapace (en ajoutant une couche d'enrochements supplémentaire, en adoucissant la pente, ...)
- réduire les sollicitations (en construisant un nouvel ouvrage en première ligne, par rechargement de sable, ...)

Choix du niveau de dimensionnement

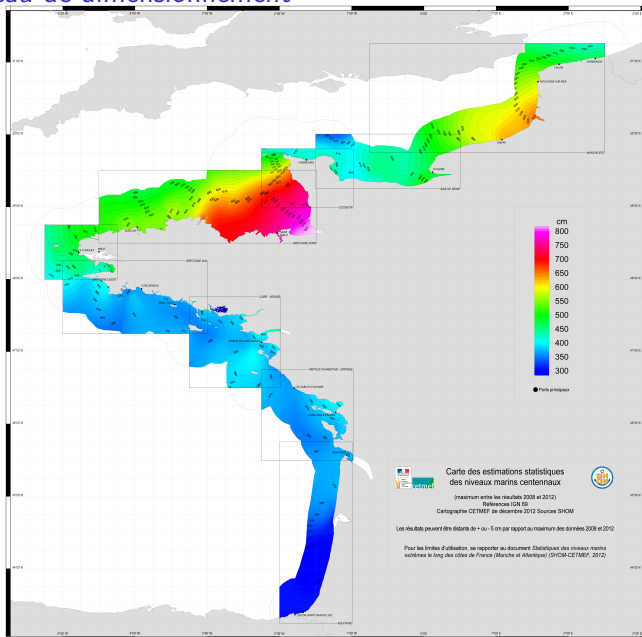
Note méthodologique relative au produit « Statistiques des niveaux marins extrêmes des côtes de France »

La connaissance des niveaux marins extrêmes est essentielle dans le cadre de la sécurité de la navigation, du dimensionnement des ouvrages et de la prévention des risques de submersion. Deux approches permettent d'apprécier les niveaux marins extrêmes : une approche empirique « historique » de recensement des niveaux atteints dans le passé ou une approche théorique déduisant les niveaux extrêmes d'une analyse statistique de mesures marégraphiques.

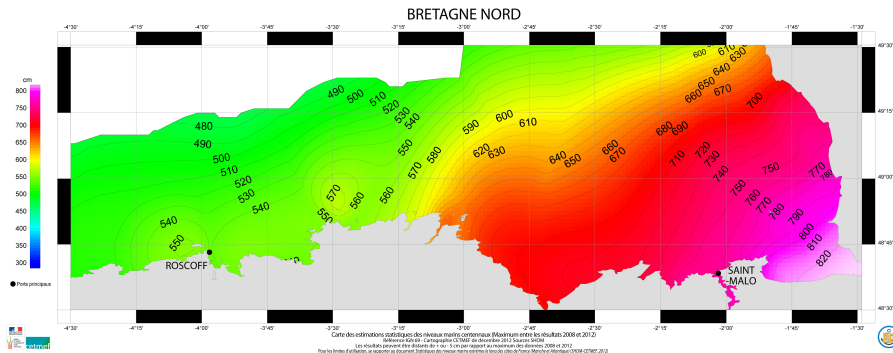
La méthode permet de fournir :

- pour tous les ports principaux, la loi de probabilité des niveaux extrêmes de pleine mer permettant de déduire les niveaux correspondant à une période de retour donnée;
- une cartographie générale des niveaux extrêmes de pleine mer sur les côtes de la Manche et de l'Atlantique (isolignes de niveaux), pour plusieurs périodes de retour (10, 20, 50 ou 100 ans).

Choix du niveau de dimensionnement



Choix du niveau de dimensionnement



Cartes des niveaux marins centennaux maximums des produits 2008 et 2012

Les niveaux sont cotés par rapport à l'IGN69.

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 **Le modèle de Stokes**
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Schéma et définitions

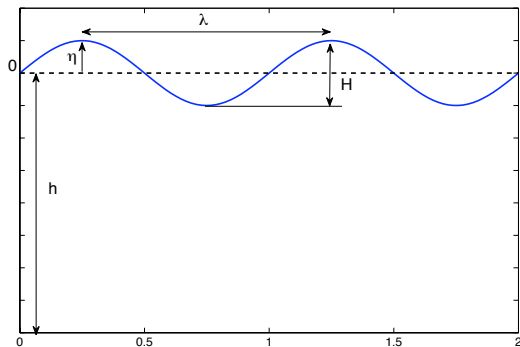


Schéma d'une onde de surface

L : Longueur d'onde (m)

$k = \frac{2\pi}{L}$: Nombre d'onde (m^{-1})

T : Période (s)

$f = \frac{1}{T}$: Fréquence (Hz)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: Pulsation ($rad.s^{-1}$)

η : Elévation de SL (m)

$H = 2a$: Double amplitude (m)

h : Profondeur (m)

Equations fondamentales de la dynamique des fluides

Equations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible

Conservation de la masse

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}) = 0$$

Conservation de la Quantité De Mouvement (QDM)

$$\underbrace{\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \right]}_{\text{Inertie}} = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_{\text{Pression}} + \underbrace{\eta \Delta \vec{u}}_{\text{Contrainte Visqueuse}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{Gravité}}$$

Echelles caractéristiques et analyse dimensionnelle (1/5)

On se donne

- une échelle de longueur : L_0
- une échelle de temps : T_0

d'où on déduit

- une échelle de vitesse : $U_0 = \frac{L_0}{T_0}$
- une échelle de pression : $P_0 = \rho \left(\frac{L_0}{T_0} \right)^2$

Avec ces échelles on construit les variables sans dimensions :

- position : $\vec{x} = \frac{\vec{x}}{L_0}$
- temps : $\bar{t} = \frac{t}{T_0}$
- vitesse : $\vec{u} = \frac{\vec{u}T_0}{L_0}$
- pression : $\bar{p} = \frac{pT_0^2}{\rho L_0^2}$

Echelles caractéristiques et analyse dimensionnelle (2/5)

On peut alors adimensionnaliser les équations de Navier-Stokes comme suit

Conservation de la masse

$$\frac{L_0}{L_0 T_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}) = 0$$

Conservation de la Quantité De Mouvement (QDM)

$$\rho \frac{L_0}{T_0^2} \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \right] = -\frac{\rho L_0^2}{L_0 T_0^2} \vec{\nabla} \bar{p} + \frac{L_0}{L_0^2 T_0} \eta \Delta \vec{u} + \rho \vec{g}$$

$$\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \right] = -\vec{\nabla} \bar{p} + \frac{\eta T_0}{\rho L_0^2} \Delta \vec{u} + \frac{T_0^2 \|\vec{g}\|}{L_0} \frac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|}$$

Deux nombres sans dimensions ressortent :

$$\frac{\eta T_0}{\rho L_0^2}$$

et

$$\frac{T_0^2 \|\vec{g}\|}{L_0}$$

Echelles caractéristiques et analyse dimensionnelle (3/5)

Ces deux nombres sans dimensions ne sont autres que :

- Le nombre de Reynolds : $Re = \frac{\rho L_0^2}{\eta T_0} = \frac{\rho U_0 L_0}{\eta}$

- Le nombre de Froude : $Fr^2 = \frac{L_0}{T_0^2 \|\vec{g}\|} = \frac{U_0^2}{L_0 \|\vec{g}\|}$

L'équation de QDM adimensionnée pour le fluide s'écrit finalement :

$$\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial \bar{t}} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \right] = -\vec{\nabla} \bar{p} + \frac{1}{Re} \Delta \vec{u} + \frac{1}{Fr^2} \vec{g}$$

avec $\vec{g} = \frac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|}$

Echelles caractéristiques et analyse dimensionnelle (4/5)

Les échelles caractéristiques pour la propagation de la houle au large peuvent être prise comme suit :

- Echelle de longueur = Longueur d'onde de la houle :
 $L_0 = L \approx 10 - 1000 \text{ m}$
- Echelle de temps = Période de la houle : $T_0 = T \approx 10 \text{ s}$

On peut alors estimer l'ordre de grandeur de ces deux nombres sans dimensions

- Le nombre de Reynolds : $Re = \frac{\rho L_0^2}{\eta T_0} = \frac{10^3 (10^1 - 10^3)^2}{10^{-3} 10} = 10^7 - 10^{11}$
- Le nombre de Froude : $Fr = \frac{\sqrt{L_0}}{T_0 \sqrt{\|\vec{g}\|}} = \frac{\sqrt{10^2}}{10 \sqrt{10}} = O(1)$

Echelles caractéristiques et analyse dimensionnelle (5/5)

L'ordre de grandeurs des différents termes de l'équation de QDM pour le fluide peuvent maintenant être estimés :

$$\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \right] = -\vec{\nabla} \bar{p} + \underbrace{\frac{1}{Re} \Delta \vec{u}}_{O(10^{-11} - 10^{-7})} + \underbrace{\frac{1}{Fr^2} \vec{g}}_{O(1)}$$

L'équation de QDM pour le fluide peut donc être simplifiée suivant :

$$\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \right] = -\vec{\nabla} \bar{p} + \frac{1}{Fr^2} \vec{g}$$

Hypothèse d'irrotationnalité et conséquences

Si on fait l'hypothèse d'irrotationnalité : $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

Alors il existe une fonction potentielle des vitesses ϕ telle que $\vec{u} = \vec{\nabla} \phi$

Démo 2D :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}$$

$$\text{D'où } \boxed{\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0} \Leftrightarrow \text{l'écoulement est irrotationnel}$$

Conséquence sur l'équation de conservation de la masse :

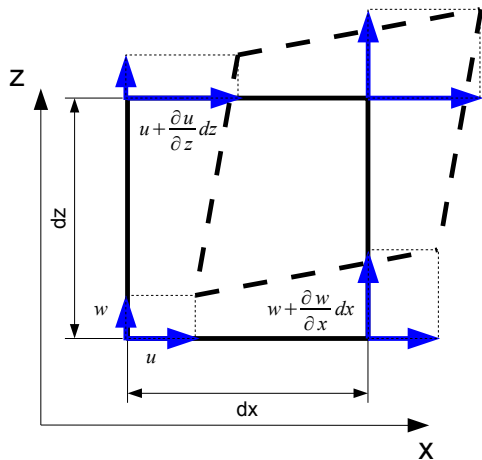
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \Delta \phi = 0$$

Donc la fonction potentielle des vitesses est solution de l'équation de Laplace

$$\boxed{\Delta \phi = 0}$$

Hypothèse d'irrotationnalité et conséquences

Interprétation de l'hypothèse d'irrotationnalité : $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$



Contribution à la vitesse angulaire par unité de temps :

- $w : \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial x}$
- $u : -\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta t}{\Delta t} = -\frac{\partial u}{\partial z}$

$$\rightarrow \omega_y = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

\Leftrightarrow Déformation sans rotation

Hypothèse d'irrotationnalité et conséquences

On peut également définir une fonction courant ψ telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Écoulement irrotationnel :

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Donc la fonction courant est aussi solution de l'équation de Laplace

$$\Delta \psi = 0$$

Remarque : Les lignes équipotentielles ($\phi = \text{constante}$) et les lignes de courant ($\psi = \text{constante}$) se coupent perpendiculairement.

Bilan sur les équations générales du mouvement (1/4)

En faisant l'hypothèse d'écoulement **irrotationnel**, les équations du problème se résument à :

Conservation de la masse : $\Delta\phi = 0$

et conservation de la QDM : $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + g z \right)$$

Écoulement irrotationnel : $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 + \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + g z \right) = \vec{0}$

Fonction potentielle des vitesses: $\vec{u} = \vec{\nabla} \phi$

$$\frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} ((\vec{\nabla} \phi)^2) + \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + g z \right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} \phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right) = \vec{0}$$

Bilan sur les équations générales du mouvement (2/4)

Ce qui montre que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \text{ (constante)}$$

Bernoulli pour un écoulement instationnaire

Bilan sur les équations générales du mouvement (2/4)

Ce qui montre que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \text{ (constante)}$$

Bernoulli pour un écoulement instationnaire

Le problème mathématique consiste donc à trouver ϕ et p tels que $\forall \vec{x}$ et $\forall t$

$$\Delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C(t)$$

L'équation de Laplace est une EDP du deuxième ordre et nécessite donc la prescription de 2 Conditions Aux Limites (CAL) sur ϕ / dimension spatiale.

L'équation de Bernoulli est définie à une constante $C(t)$ près qui fixe la référence de pression (pression atmosphérique ici)

Bilan sur les équations générales du mouvement (3/4)

CAL sur ϕ en 2D dans le plan (Oxz)

- La vitesse normale au fond est nulle $w(z = -h) = 0$ (fond plat)

donc $\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$

- Une particule fluide à la SL (en $z = \eta$) reste à la SL : $w(z = \eta) = \frac{d\eta}{dt}$

soit $\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}$ donc $\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$

CAL sur p

- La pression à la SL est égale à la pression atmosphérique :

donc $p(z = \eta) = p_{atm}$

Bilan sur les équations générales du mouvement (4/4)

Trouver $\phi(x, z, t)$ et $\eta(x, t)$ tels que

- $\Delta\phi = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^+$

- Au fond : $\frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$

- A la SL :

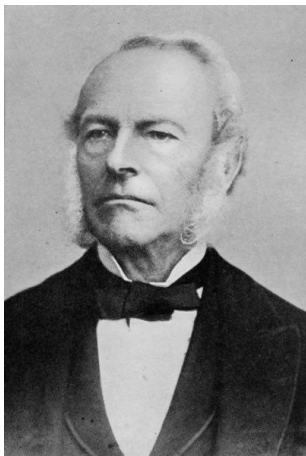
$$\frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{z=\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} \Big|_{z=\eta}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi \Big|_{z=\eta})^2 + g\eta = \frac{p_{atm}}{\rho}$$

Remarques :

- 1 La position de la SL (η) est une inconnue du problème !
- 2 Le système d'équation aux dérivées partielles est non-linéaire
→ dépendance en η , terme en ϕ^2 et $\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x}$

Le modèle de Stokes :



George Gabriel Stokes (1819-1903)

Mathématicien et physicien britannique, professeur à l'Université de Cambridge

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - Élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - **Dérivation du modèle**
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Le modèle de Stokes : développement asymptotique

Développement en série de $\epsilon = \frac{H}{L}$ (cambrure) :

$$\rightarrow \phi(x, z, t) = \phi_0 + \epsilon \phi_1(x, z, t) + \epsilon^2 \phi_2(x, z, t) + \epsilon^3 \phi_3(x, z, t) + \dots$$

$$\rightarrow \eta(x, z, t) = \eta_0 + \epsilon \eta_1(x, z, t) + \epsilon^2 \eta_2(x, z, t) + \epsilon^3 \eta_3(x, z, t) + \dots$$

L'état au repos, $\phi_0 = 0$ et $\eta_0 = 0$, est trivialement solution du problème

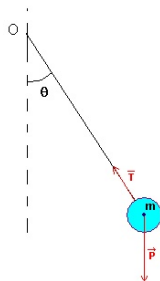
Analogie avec le pendule :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

Pour $\theta \ll 1$, $\sin(\theta) \approx \theta$ et l'équation du mouvement devient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



Le modèle de Stokes : Exercice 1

Développement en série de $\epsilon = \frac{H}{L}$ (cambrure) :

$$\rightarrow \phi(x, z, t) = \phi_0 + \epsilon \phi_1(x, z, t) + \epsilon^2 \phi_2(x, z, t) + \epsilon^3 \phi_3(x, z, t) + \dots$$

$$\rightarrow \eta(x, z, t) = \eta_0 + \epsilon \eta_1(x, z, t) + \epsilon^2 \eta_2(x, z, t) + \epsilon^3 \eta_3(x, z, t) + \dots$$

Ecrire les équations vérifiées aux deux premiers ordres : ϵ et ϵ^2

Trouver $\phi(x, z, t)$ et $\eta(x, t)$ tels que

- $\Delta\phi = 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}$

- Au fond : $\frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$

- A la SL :

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{z=\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} \Big|_{z=\eta}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi \Big|_{z=\eta})^2 + g\eta = \frac{p_{atm}}{\rho}$$

Le modèle de Stokes : développement asymptotique

Développement en série de $\epsilon = \frac{H}{L}$ (cambrure) :

$$\rightarrow \phi(x, z, t) = \phi_0 + \epsilon \phi_1(x, z, t) + \epsilon^2 \phi_2(x, z, t) + \epsilon^3 \phi_3(x, z, t) + \dots$$

$$\rightarrow \eta(x, z, t) = \eta_0 + \epsilon \eta_1(x, z, t) + \epsilon^2 \eta_2(x, z, t) + \epsilon^3 \eta_3(x, z, t) + \dots$$

Substitution de cette série dans les équations du mouvement :

Conservation de la masse :

$$\Delta\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon\Delta\phi_1 + \epsilon^2\Delta\phi_2 + o(\epsilon^2) = 0$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} \epsilon : & \Delta\phi_1 = 0 \\ \epsilon^2 : & \Delta\phi_2 = 0 \\ \dots & \end{cases} \quad (1)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, ϕ_k est solution de l'équation de Laplace

Le modèle de Stokes : Condition au fond

Fond imperméable :
$$w \Big|_{z=-h} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=-h} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{z=-h} + o(\epsilon^2) = 0$$

$$\text{donc} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon : \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \\ \epsilon^2 : \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$$

Le modèle de Stokes : Condition cinématique de SL (1/2)

$$\text{Condition cinématique de SL : } \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=\eta} \frac{\partial \eta_1}{\partial x}}$$

$$\Rightarrow \left(\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + o(\epsilon^2) \right) \Big|_{z=\eta} = \epsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + o(\epsilon^2)$$

$$+ \left[\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + o(\epsilon^2) \right] \Big|_{z=\eta} \left[\epsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \epsilon^2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + o(\epsilon^2) \right]$$

$$\text{donc } \left\{ \begin{array}{l} \epsilon : \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \\ \epsilon^2 : \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{z=\eta} \frac{\partial \eta_1}{\partial x}}_{\text{Non-linéarité}} \\ \dots \end{array} \right.$$

Le modèle de Stokes : Condition cinématique de SL (2/2)

Problème : η solution du système !!! Difficile d'appliquer une CAL sur une frontière de position inconnu.

Condition cinématique de SL à l'ordre ϵ :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t}$$

Linéarisons cette CAL en développant en série de Taylor autour de $z = 0$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + \eta \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + o(\eta) = \frac{\partial \eta_1}{\partial t}$$

A l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t}$$

Le modèle de Stokes : Condition dynamique de SL (1/2)

Condition dynamique de SL :
$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 \Big|_{z=\eta} + g\eta = 0}$$

$$\Rightarrow \left(\epsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + o(\epsilon^2) \right) \Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2} \left(\epsilon \vec{\nabla} \phi_1 + \epsilon^2 \vec{\nabla} \phi_2 + o(\epsilon^2) \right) \Big|_{z=\eta}^2 + g(\epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + o(\epsilon^2)) = 0$$

donc
$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon : \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + g\eta_1 = 0 \\ \epsilon^2 : \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \underbrace{\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi_1)^2 \Big|_{z=\eta}}_{\text{Non-linéarité}} + g\eta_2 = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

Idem CAL cinématique de SL :
$$\boxed{\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\eta_1 = 0}$$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre correspond à la solution à l'ordre ϵ du problème précédent :

Trouver $\phi_1(x, z, t)$ et $\eta_1(x, t)$ tels que

- $\Delta\phi_1 = 0$

- Au fond : $\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\Big|_{z=-h} = 0$

- A la SL :

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial\eta_1}{\partial t} \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\Big|_{z=0} + g\eta_1 = 0 \quad (\text{b})$$

Remarque : $\frac{\partial}{\partial t}(b) \rightarrow (a) : \frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}\Big|_{z=0} + g\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{c})$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Recherche des solutions

Nous recherchons des solutions par la méthode de séparation des variables. Pour cela, nous écrivons le potentiel des vitesses sous la forme suivante :

$$\phi_1(x, z, t) = f_x(x) f_z(z) f_t(t)$$

En substituant cette solution dans l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi_1 = 0 \Rightarrow f_x''(x) f_z(z) f_t(t) + f_x(x) f_z''(z) f_t(t) = 0$$

En substituant cette solution dans la CAL de SL (c) :

$$\left. \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \right|_{z=0} + g \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \Rightarrow f_x(x) f_z(0) f_t''(t) + g f_x(x) f_z'(0) f_t(t) = 0$$

$$\frac{f_x''(x)}{f_x(x)} = -\frac{f_z''(z)}{f_z(z)} = C_1 \quad (cst) \quad (1)$$

$$\frac{f_t''(t)}{f_t(t)} = -\frac{f_z'(0)}{f_z(0)} = C_2 \quad (cst) \quad (2)$$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Etude des solutions

$$\frac{f_t''(t)}{f_t(t)} = -\frac{f_z'(0)}{f_z(0)} = C_2 \quad (cst) \rightarrow \boxed{f_t''(t) - C_2 f_t(t) = 0}$$

$$\boxed{C_2 > 0} : f_t(t) = E e^{\sqrt{C_2}t} + F e^{-\sqrt{C_2}t}$$

$\Rightarrow f_t(t) \rightarrow \infty$: Pas de sens physique

$\Rightarrow f_t(t) \rightarrow 0$: Pas d'intérêt

$$\boxed{C_2 < 0} : f_t(t) = E \cos(\sqrt{|C_2|}t) + F \sin(\sqrt{|C_2|}t)$$

\Rightarrow Solution sinusoïdale de pulsation $\omega = \sqrt{|C_2|}$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Etude des solutions

$$\frac{f_x''(x)}{f_x(x)} = -\frac{f_z''(z)}{f_z(z)} = C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{f_x''(x) - C_1 f_x(x) = 0} \text{ et } \boxed{f_z''(z) + C_1 f_z(z) = 0}$$

$$\boxed{C_1 > 0} : f_x(x) = Ae^{\sqrt{C_1}x} + Be^{-\sqrt{C_1}x} \text{ et } f_z(z) = C\cos(\sqrt{C_1}z) + D\sin(\sqrt{C_1}z)$$

⇒ Modes évanescents : amortissement suivant x

$$\boxed{C_1 < 0} : f_x(x) = A\cos(\sqrt{|C_1|x}) + B\sin(\sqrt{|C_1|x}) \text{ et } f_z(z) = Ce^{\sqrt{|C_1|z}} + De^{-\sqrt{|C_1|z}}$$

⇒ Solution sinusoïdale de nombre d'onde $k = \sqrt{|C_1|}$

⇒ Amortissement exponentielle suivant z

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Application des CAL

La solution qui nous intéresse correspond à $C_1 < 0$ et $C_2 < 0$:

$$\phi_1(x, z, t) = (A \cos(kx) + B \sin(kx)) \left(C e^{kz} + D e^{-kz} \right) (E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t))$$

Considérons 4 combinaisons élémentaires de la solution générale :

$$\phi_1^1(x, z, t) = A_1 (C e^{kz} + D e^{-kz}) \cos(kx) \cos(\omega t)$$

$$\phi_1^2(x, z, t) = A_2 (C e^{kz} + D e^{-kz}) \sin(kx) \cos(\omega t)$$

$$\phi_1^3(x, z, t) = A_3 (C e^{kz} + D e^{-kz}) \cos(kx) \sin(\omega t)$$

$$\phi_1^4(x, z, t) = A_4 (C e^{kz} + D e^{-kz}) \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Equation différentielle du second ordre à deux variables indépendantes

⇒ 4 constantes / 6

Le modèle de Stokes : Exercice 2

Considérons la première solution élémentaire :

$$\phi_1^1(x, z, t) = A_1 (Ce^{kz} + De^{-kz}) \cos(kx) \cos(\omega t)$$

Appliquer les CAL de fond et de SL pour déduire la valeur des constantes et la relation de dispersion

- Au fond : $\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$

- A la SL :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\eta_1 = 0 \quad (\text{b})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \Big|_{z=0} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{c})$$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Application des CAL

Considérons la première solution élémentaire :

$$\phi_1^1(x, z, t) = A_1 (C e^{kz} + D e^{-kz}) \cos(kx) \cos(\omega t)$$

Condition d'imperméabilité au fond : $\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$

$$\Leftrightarrow kC e^{-kh} - kD e^{kh} = 0$$

$$\Leftrightarrow C = D e^{2kh}$$

$$\text{donc } f_z(z) = 2 D e^{kh} \cosh(k(z+h))$$

$$\phi_1^1(x, z, t) = A_1 2 D e^{kh} \cosh(k(z+h)) \cos(kx) \cos(\omega t)$$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Application des CAL

Potentiel élémentaire : $\phi_1^1(x, z, t) = A_1 2 D e^{kh} \cosh(k(z+h)) \cos(kx) \cos(\omega t)$

Condition dynamique de SL : $\eta_1 = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0}$

$$\Rightarrow \eta_1 = \frac{2 \omega A_1 D}{g} e^{kh} \cosh(kh) \cos(kx) \sin(\omega t)$$

La valeur maximale de η_1 est a l'amplitude de la houle : $\max(\eta_1) = a$

$$\Rightarrow a = \frac{2 \omega A_1 D}{g} e^{kh} \cosh(kh)$$

$$\Leftrightarrow 2 A_1 D e^{kh} = \frac{a g}{\omega \cosh(kh)}$$

Potentiel élémentaire : $\phi_1^1(x, z, t) = \frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx) \cos(\omega t)$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Bilan sur les potentiels élémentaires

En procédant de la même manière pour les 4 potentiels élémentaires, nous obtenons :

$$\phi_1^1(x, z, t) = + \frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

$$\phi_1^2(x, z, t) = - \frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \sin(kx) \cos(\omega t)$$

$$\phi_1^3(x, z, t) = + \frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx) \sin(\omega t)$$

$$\phi_1^4(x, z, t) = - \frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Toutes combinaison linéaire de ces quatre potentiels élémentaires est solution du problème de Stokes 1^{er} ordre.

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Onde progressive

Par exemple, le potentiel $\phi_1 = \phi_1^4 - \phi_1^1$ correspond à une onde progressive voyageant vers les x croissant :

$$\phi_1(x, z, t) = \phi_1^4 - \phi_1^1 = -\frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \underbrace{(\cos(kx) \cos(\omega t) + \sin(kx) \sin(\omega t))}_{=\cos(kx - \omega t)}$$

$$\phi_1(x, z, t) = -\frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

Et d'après la CAL de SL : $\eta_1 = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} \Rightarrow \eta_1 = a \sin(kx - \omega t)$

La solution du modèle de Stokes 1^{er} ordre pour l'élévation de surface libre η_1 est une sinusoïde \Rightarrow fonction périodique en x et en t .

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Relation de dispersion

$$\text{Potentiel : } \phi(x, z, t) = \frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

$$\text{Condition mixte de SL (c) : } \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \Big|_{z=0} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

$$-\omega^2 \frac{a g \cosh(kh)}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) + g k \frac{a g \sinh(kh)}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 \cosh(kh) + g k \sinh(kh) = 0$$

Finallement :

$$\omega^2 = g k \tanh(kh)$$

Relation de dispersion

Le modèle de Stokes : Exercice 3

Par définition, la célérité s'écrit : $C = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T}$

et avec la relation de dispersion donne $\omega^2 = g k \tanh(kh)$,

a) Déterminer les expressions de C , L et T en fonction de g , h , T et L

b) Etudier les deux cas limites :

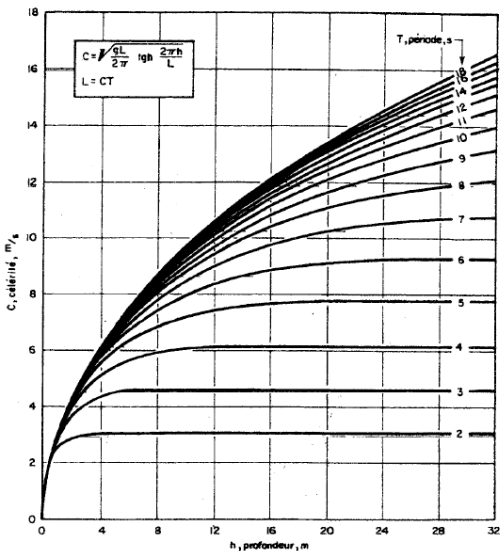
- Profondeur infinie : $kh \gg 1 \Leftrightarrow \frac{h}{L} > \frac{1}{2}$
- Eau peu profonde : $kh \ll 1 \Leftrightarrow \frac{h}{L} < \frac{1}{20}$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Célérité, longueur d'onde, période

Par définition : $C = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T}$ et avec $\omega^2 = g k \tanh(kh)$,

nous pouvons déduire les relations suivantes :

- Célérité : $C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} = \sqrt{\frac{gL}{2\Pi} \tanh\left(\frac{2\Pi h}{L}\right)}$
- Longueur d'onde : $L = C T = \frac{g T^2}{2\Pi} \tanh\left(\frac{2\Pi h}{L}\right)$ (equation transcendante)
- Période : $T = \frac{L}{C} = \sqrt{\frac{2\Pi L}{g} \frac{1}{\tanh\left(\frac{2\Pi h}{L}\right)}}$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Célérité

$$\text{Célérité : } C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$$

Avec $L = CT$:

$$C = \sqrt{\frac{gCT}{2\pi}} \tanh\left(\frac{2\pi h}{CT}\right)$$

La solution $C(h)$ pour un T fixé est obtenu graphiquement ou numériquement.

La célérité est une fonction croissante de la profondeur et de la période

1^{er} cas limite : profondeur infinie

Supposons : $\boxed{\frac{h}{L} > \frac{1}{2} \text{ ou } kh \gg 1} \Leftrightarrow h > \frac{L}{2}$

$$\Rightarrow \tanh(kh) = \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \approx 1$$

Célérité :

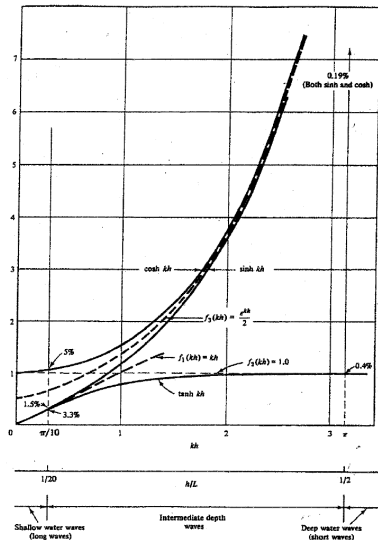
$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)} \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

Longueur d'onde :

$$L = \frac{g T^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \approx \frac{g T^2}{2\pi} \approx 1.56 T^2$$

$$\Rightarrow \boxed{C \approx \frac{g T}{2\pi} \approx 1.56 T} \text{ et } \boxed{L = 1.56 T^2}$$

C et L ne dépendent que de T



2^{ème} cas limite : eau peu profonde (shallow water)

Supposons : $\frac{h}{L} < \frac{1}{20}$ ou $kh \ll 1 \Leftrightarrow h <$

$$\Rightarrow \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \approx \frac{2\pi h}{L}$$

Célérité :

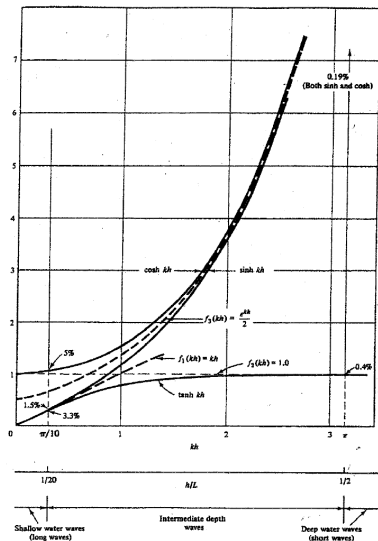
$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)} \approx \sqrt{gh}$$

$$\Rightarrow C \approx \sqrt{gh}$$

C ne dépend que de h

Pour les profondeurs intermédiaires :

$$\frac{1}{20} < \frac{h}{L} < \frac{1}{2} \text{ pas de simplification possible !}$$



Le modèle de Stokes : Applications numériques

Formulaire :

$$\frac{h}{L} > \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} > \frac{h}{L} > \frac{1}{20} \qquad \frac{h}{L} < \frac{1}{20}$$

$$L = \frac{g T^2}{2 \pi} \approx 1.56 T^2 \qquad \frac{g T^2}{2 \pi} \tanh\left(\frac{2 \pi h}{L}\right) \qquad \sqrt{g h} T$$

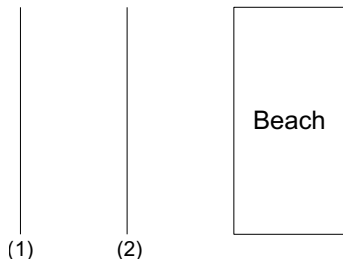
Remplir le tableau ci-dessous :

		T=5 s	T = 15 s
h=3000 m	L =		
	C =		
h=30 m	L =		
	C =		
h=5 m	L =		
	C =		
h=3 m	L =		
	C =		

Le modèle de Stokes : Applications numériques

SOLUTION

		$T = 5 \text{ s}$	$T = 15 \text{ s}$
h=3000 m	$L =$	39 m	351 m
	$h/L =$	77	8.5
	$C =$	7.8 m/s	23.4 m/s
h=30 m	$L =$	39 m	234 m
	$h/L =$	0.77	0.13
	$C =$	7.8 m/s	15.6 m/s
h=5 m	$L =$	30 m	103 m
	$h/L =$	0.17	0.049
	$C =$	6 m/s	6.9 m/s
h=3 m	$L =$	27 m	81 m
	$h/L =$	0.12	0.038
	$C =$	5.4 m/s	5.4 m/s

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Période = constante

Nb d'ondes :

$$n_1 = \frac{\Delta t}{T_1} \quad n_2 = \frac{\Delta t}{T_2}$$

Bilan sur le nb d'onde accumulée entre (1) et (2) : $n_2 - n_1 = \Delta t \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$

t variable indépendante $\Rightarrow \Delta t$ arbitraire donc pour $\Delta t \rightarrow \infty : n_2 - n_1 \rightarrow \infty$

Pas de sens physique $\Rightarrow \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{T_1 = T_2}$

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Champ de vitesse

$$\text{Potentiel : } \phi_1(x, z, t) = -\frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

Par définition du potentiel des vitesses: $\vec{u} = \vec{\nabla} \phi_1$

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{a g k \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) \\ w = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = -\frac{a g k \sinh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

Et en utilisant la relation de dispersion : $\omega^2 = g k \tanh(kh)$, on simplifie

$$\begin{cases} u = a \omega \frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) \\ w = -a \omega \frac{\sinh(k(z+h))}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Trajectoire des particules fluides (1/2)

La trajectoire d'une particule fluide est obtenu à partir de l'intégral première du mouvement : $\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{u}$

→ Nous intégrons donc le champ de vitesse par rapport au temps autour de la position moyenne de la particule : (X_0, Z_0)

$$\begin{cases} X = \int u dt = \int a \omega \frac{\cosh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)} \sin(kX_0 - \omega t) dt \\ Z = \int w dt = - \int a \omega \frac{\sinh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)} \cos(kX_0 - \omega t) dt \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} X = X_0 + a \frac{\cosh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)} \cos(kX_0 - \omega t) \\ Z = Z_0 + a \frac{\sinh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)} \sin(kX_0 - \omega t) \end{cases}$$

Le modèle de Stokes 1^{er} ordre : Trajectoire des particules fluides (2/2)

$$\left\{ \begin{array}{l} X = X_0 + a \frac{\cosh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)} \cos(kX_0 - \omega t) \\ Z = Z_0 + a \frac{\sinh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)} \sin(kX_0 - \omega t) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos^2(\bullet) = \frac{(X - X_0)^2}{\left(a \frac{\cosh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)}\right)^2} \\ \sin^2(\bullet) = \frac{(Z - Z_0)^2}{\left(a \frac{\sinh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)}\right)^2} \end{array} \right.$$

Or $\cos^2(kX_0 - \omega t) + \sin^2(kX_0 - \omega t) = 1$ donc $\frac{(X - X_0)^2}{A^2} + \frac{(Z - Z_0)^2}{B^2} = 1$

où $A = a \frac{\cosh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)}$ et $B = a \frac{\sinh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)}$

**La trajectoire des particules fluides est une ellipse
de grand axe A et de petit axe B**

1^{er} cas limite : profondeur infinie

Supposons : $\frac{h}{L} > \frac{1}{2}$ ou $kh \gg 1 \Rightarrow \omega^2 \approx g k$

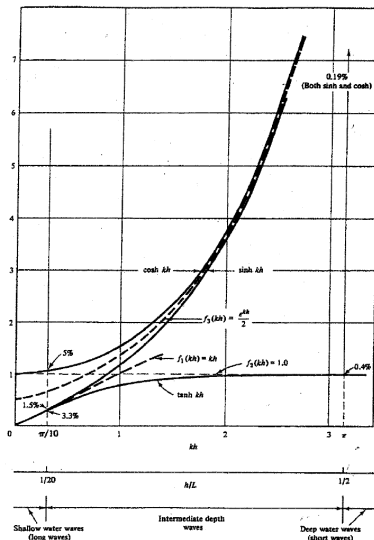
$$\begin{cases} A = a \frac{\cosh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)} \\ B = a \frac{\sinh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \approx a e^{kZ_0} \\ B \approx a e^{kZ_0} \end{cases}$$

Donc $(X - X_0)^2 + (Z - Z_0)^2 = a^2 e^{2kZ_0}$

La trajectoire des particules fluides

est un cercle de rayon $R = a e^{kZ_0} \rightarrow 0$ qd $Z_0 \rightarrow -\infty$



2^{ème} cas limite : eau peu profonde (shallow water)

Supposons : $\frac{h}{L} < \frac{1}{20}$ ou $kh \ll 1$

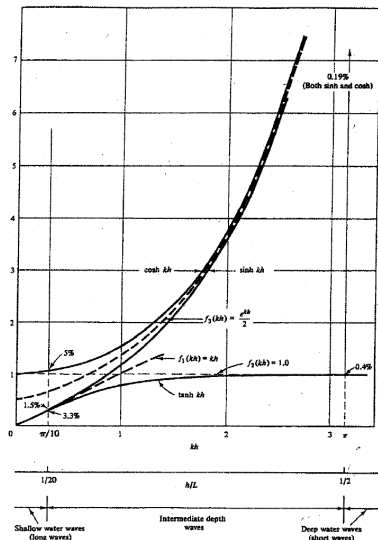
$$\Rightarrow \omega^2 \approx g k^2 h$$

$$\begin{cases} A = a \frac{\cosh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)} \\ B = a \frac{\sinh(k(Z_0 + h))}{\sinh(kh)} \end{cases}$$

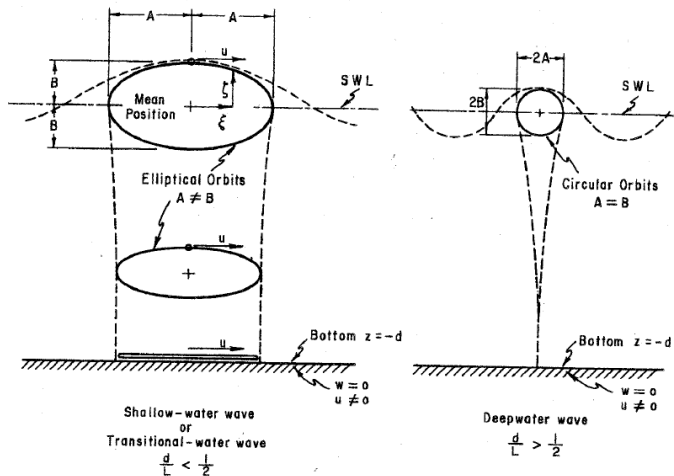
$$\Rightarrow \begin{cases} A \approx \frac{a}{kh} = cst \\ B \approx a \frac{k(Z_0 + h)}{kh} \end{cases}$$

Donc $B \rightarrow 0$ qd $Z_0 \rightarrow -h$

Ellipse s'aplatissant vers le fond

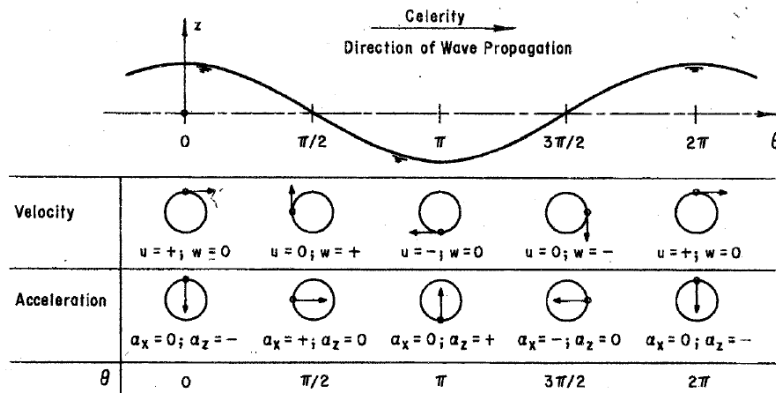


Trajectoire : illustration



Trajectoire fermée \Rightarrow pas de transport de matière !

Vitesse : illustration



$$\text{Flux moyen sur la profondeur : } \bar{q} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^{\eta} u \, dz \, dt$$

$$\bar{q} \propto \frac{1}{T} \int_0^T \dots \sin(kx - \omega t) dt = 0 \Rightarrow \text{flux de masse moyen nul}$$

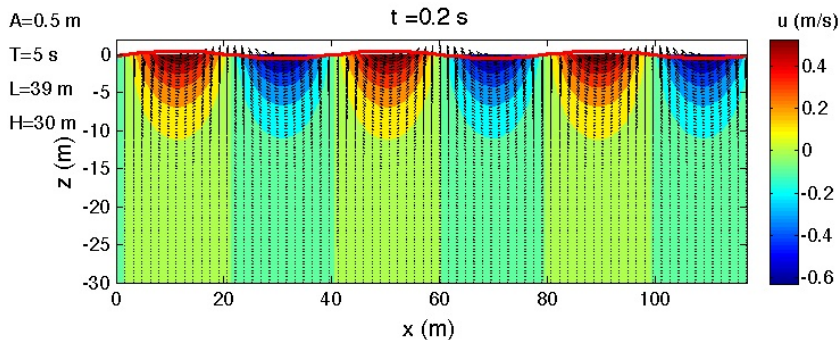
Houle de Stokes 1^{er} ordre en eau profonde

$$\bullet H = 30 \text{ m}$$

$$\bullet A = 0.5 \text{ m}$$

$$\bullet T = 5 \text{ s}$$

$$\bullet L = 39 \text{ m}$$

Élévation de surface libre / champ de vitesse vectoriel / isocontours de u 

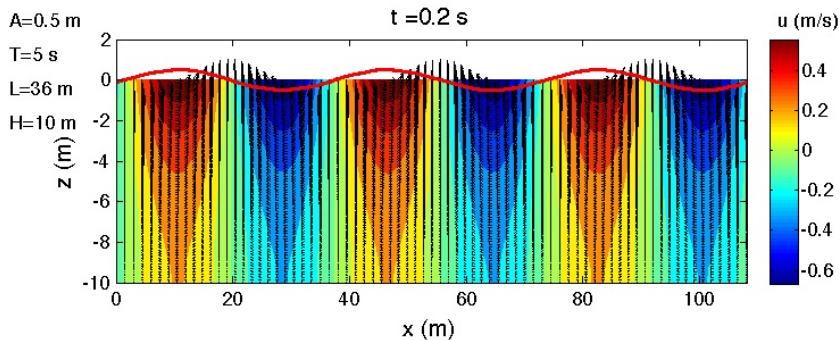
Houle de Stokes 1^{er} ordre en eau peu profonde

● $H = 10 \text{ m}$

● $T = 5 \text{ s}$

● $A = 0.5 \text{ m}$

● $L = 36 \text{ m}$

Élévation de surface libre / champ de vitesse vectoriel / isocontours de u 

Champs de pression

De l'équation du mouvement linéarisée : $\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g z = 0 \Rightarrow$ $p = -\rho \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho g z$

On introduisant le potentielle de vitesse : $\phi_1(x, z, t) = -\frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$

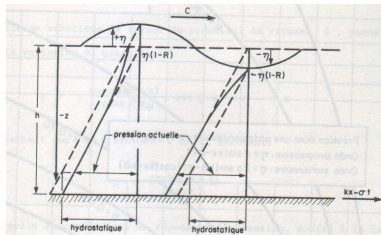
On obtient : $p = \rho g \underbrace{\frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)}}_{=R} \underbrace{a \sin(kx - \omega t)}_{=\eta} - \rho g z$ donc $\frac{p}{\rho g} = R \eta - z$

où R représente le coefficient de réponse de la pression et $R \eta$ correspond à l'écart à la pression hydrostatique au repos.

La pression sous un creux est plus forte que l'hydrostatique

La pression sous une crête est moins forte que l'hydrostatique

⇒ Effet engendré par l'inertie du fluide



Houle de Stokes 1^{er} ordre en eau profonde

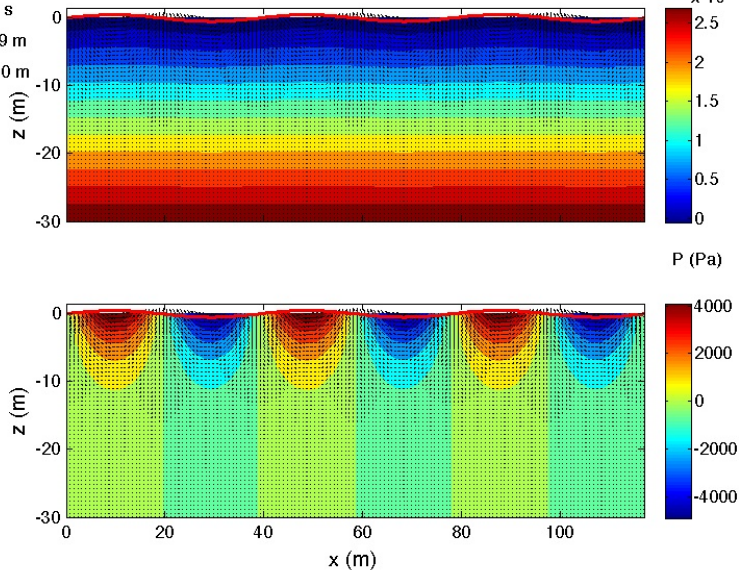
A=0.5 m

T=5 s

L=39 m

H=30 m

t = 10 s



Théorie linéaire (Stokes 1^{er} ordre) : Limite de validité

La théorie linéaire est basée sur les hypothèses :

- ① Faible cambrure : $\epsilon = \frac{H}{L} \ll 1$
- ② Grande profondeur relative : $\frac{h}{L} \gg 1$

Modèle linéaire = solution du premier terme dans la série en $\epsilon = \frac{H}{L}$.

Quand ϵ devient de plus en plus "grand" les termes d'ordres supérieurs ne peuvent plus être négligés. La limite de la théorie linéaire est donnée par le paramètre d'Ursell :

$$U_r = \frac{H}{L} \left(\frac{L}{h} \right)^3 \propto \frac{\phi_2}{\phi_1} \ll 1$$

Limite la validité de la théorie linéaire :

En eau profonde $\frac{h}{L} > 1/2$, c'est la cambrure $\frac{H}{L}$

En eau peu profonde $\frac{h}{L} < 1/20$ c'est la profondeur relative $\frac{h}{L}$.

Les différents modèles de Houle

∃ de **nombreux modèles** mathématiques de propagation de la houle.

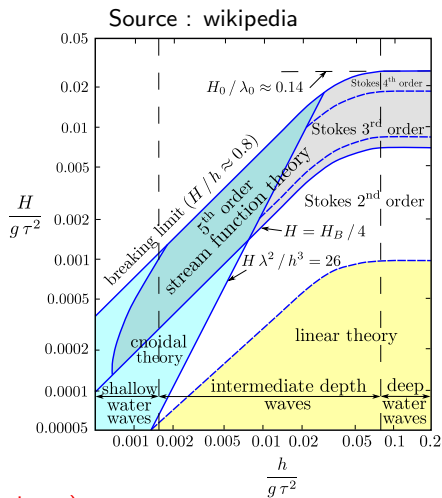
Domaines de validité dépend de la profondeur h et de la hauteur de la vague H .

Deux nombres sans dimension important :

- la **cambrure** $\frac{H}{L}$ ou $k H$,
- et la **profondeur relative** $\frac{h}{L}$ ou $k h$.

Trois types d'approximations sont utilisés.

- **Stokes** : valable pour $\frac{H}{L} \ll 1$ (faible cambrure).
- **cnôïdales** : profondeurs faibles (ne satisfont pas l'équation de Laplace).
- approximations basées sur la résolution de la fonction de courant



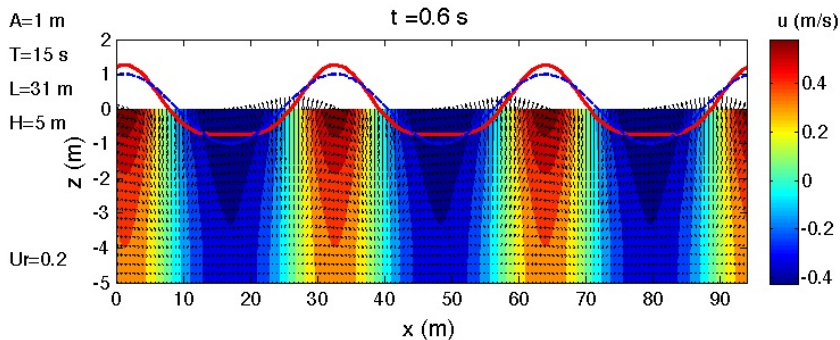
Houle de Stokes 2^{eme} ordre en eau peu profonde

Potentiels :

- $\phi_1(x, z, t) = -\frac{a g}{\omega} \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) \Rightarrow \eta_1(x, z, t) = a \cos(kx - \omega t)$

- $\phi_2(x, z, t) = -\frac{3}{8} \frac{a^2 \omega}{\sinh^4(kh)} \frac{\cosh(2k(z+h))}{\cosh(kh)} \cos[2(kx - \omega t)] + \dots$

$$\Rightarrow \eta_2(x, z, t) = \frac{a^2 k}{4} (\cotanh^3(kh) - \cotanh(kh)) \cos[2(kx - \omega t)] + \dots$$

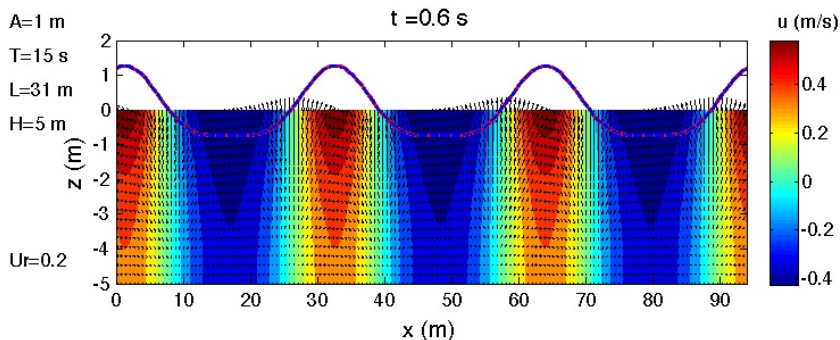


Houle de Stokes 3^{eme} ordre en eau peu profonde

Potentiels :

- $$\phi_2(x, z, t) = -\frac{3}{8} \frac{a^2 \omega}{\sinh^4(kh)} \frac{\cosh(2k(z+h))}{\cosh(kh)} \cos[2(kx - \omega t)] + \dots$$

- $$\phi_3(x, z, t) \propto a^3 \omega k \Rightarrow \eta_3(x, z, t) \propto a^3 k^2$$



Validity of wave theories

CEM : EM 1110-2-1100 (Part II) p56

*"To ensure their proper use, **the range of validity for various wave theories described in this chapter must be established. Very high-order Stokes theories provide a reference against which the accuracy of various theories may be tested. Nonlinear wave theories better describe mass transport, wave breaking, shoaling, reflection, transmission, and other nonlinear characteristics. Therefore, the usage of the linear theory has to be carefully evaluated for final design estimates in coastal practice. It is often imperative in coastal projects to use nonlinear wave theories.**"*

Superposition des ondes

Système linéaire \Rightarrow Principe de superposition

$$\phi_T = \phi^1 + \phi^2 + \dots + \phi^n = \sum_{i=1}^n \phi^i$$

$$\text{avec } \phi^i = \frac{a_i g}{\omega_i} \frac{\cosh(k_i(z+h))}{\cosh(k_i h)} \cos(k_i x \pm \omega_i t + \delta_i)$$

- δ_i : Déphasage entre les composantes i
- $k_i x \pm \omega_i t$: Sens de propagation des ondes ($- : x \uparrow$ $+$: $x \downarrow$)

D'où

$$\eta_T = \sum_{i=1}^n \eta^i$$

$$(u_T; w_T) = \sum_{i=1}^n (u^i; w^i)$$

\Rightarrow Deux exemples : le clapotis et le battement.

Superposition des ondes : le clapotis

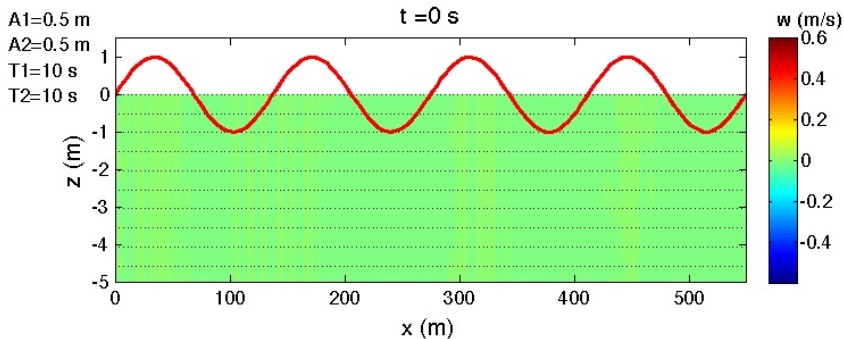
Regardons la superposition de deux ondes se propageant en direction opposées :

$$\eta^T = a_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + a_2 \sin(k_2 x + \omega_2 t + \delta_2)$$

- Exemple : réflexion d'une onde sur une paroi verticale

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_1 = \omega \text{ et } k_2 = k_1 = k$$

$$\Rightarrow \text{Condition de vitesse nulle à la paroi} \Rightarrow \delta_2 = 180^\circ \text{ et } a_2 = a_1 = a$$



Superposition des ondes : le clapotis

Regardons la superposition de deux ondes se propageant en direction opposées :

$$\eta^T = a_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + a_2 \sin(k_2 x + \omega_2 t + \delta_2)$$

- Exemple : réflexion d'une onde sur une paroi verticale

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_1 = \omega \text{ et } k_2 = k_1 = k$$

$$\Rightarrow \text{Condition de vitesse nulle à la paroi} \Rightarrow \delta_2 = 180^\circ \text{ et } a_2 = a_1 = a$$

D'où

$$\eta^T = a [\sin(kx - \omega t) - \sin(kx + \omega t)]$$

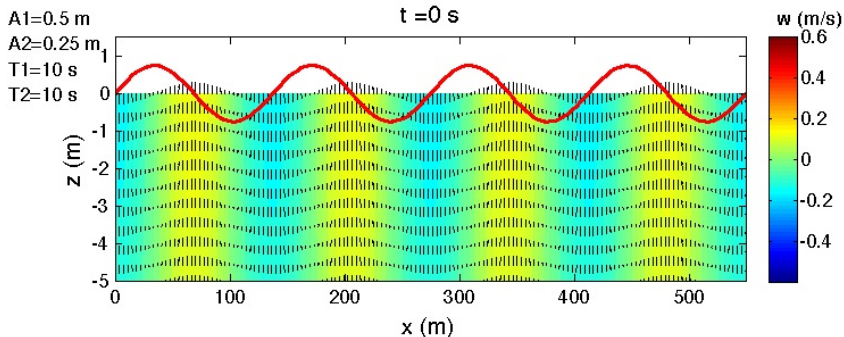
$$\eta^T = -2 a \cos(k x) \sin(\omega t)$$

Cette solution présente des noeuds et des ventres suivant la direction x.

Superposition des ondes : le clapotis

En cas de perte d'énergie, l'amplitude de l'onde réfléchi diminue : $a_2 = K_r' a_1$
avec $K_r' < 1$

- Le clapoti est dit "partiel" : il n'existe plus de noeuds à proprement parlé.
- On définit alors le coefficient de réflexion par : $K_r' = \frac{a_{max} - a_{min}}{a_{max} + a_{min}}$
Ce rapport peut être obtenu à partir d'un enregistrement de houle.



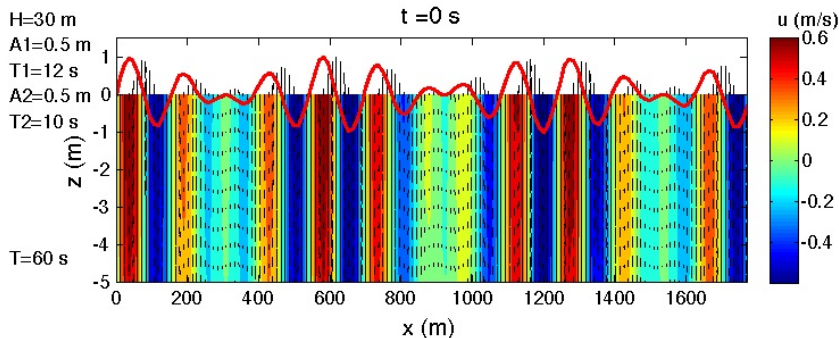
Superposition des ondes : le battement

Regardons la superposition de deux ondes se propageant dans la même direction :

$$\eta^T = a_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + a_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

Si $\exists (n; m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n T_1 = m T_2 = T_r$

Alors la plus petite valeur de T_r est la période de l'onde résultante



Superposition des ondes : le battement

Regardons la superposition de deux ondes se propageant dans la même direction :

$$\eta^T = a_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t) + a_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

Si $\exists (n; m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n T_1 = m T_2 = T_r$

Alors la plus petite valeur de T_r est la période de l'onde résultante

$$\eta^T = a_1 [\sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t)] + (a_2 - a_1) \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

avec $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et en prenant $a_1 = a_2$

$$\eta^T = 2 a_1 \sin\left(\frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right)$$

or $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$

d'où $\sin\left(\frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right) \Rightarrow$ variation lente (enveloppe)

et d'où $\cos\left(\frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right) \Rightarrow$ variation rapide

Superposition des ondes : le battement

$$\eta^T = 2 a_1 \sin\left(\frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right)$$

$$\rightarrow \cos\left(\frac{(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right) : \text{Variation lente}$$

⇒ passage par zéro tous les :

- $\Delta x = \frac{2\pi}{k_1 - k_2}$ à t fixé
- $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ à x fixé

Donc la célérité des ondes du groupe s'écrit : $C_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}$

$$\text{Avec } \omega = C k : C_g = \frac{d(C k)}{dk} = C + k \frac{dC}{dk}$$

$$\text{Et } C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \text{ d'où } C_g = C \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)$$

Superposition des ondes : le battement - démonstration vitesse de groupe

avec $\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)}$ et $C = \frac{\omega}{k}$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\omega}{dk} &= \frac{d}{dk} \left(\sqrt{gk \tanh(kh)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(g \tanh(kh) + gkh(1 - \tanh^2(kh)))}{\sqrt{gk \tanh(kh)}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2/k}{\omega} + \frac{gkh}{\omega \cosh^2(kh)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k} + \frac{gk \tanh(kh)h}{\omega \sinh(kh) \cosh(kh)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(C + \frac{\omega^2 h}{\omega 1/2 \sinh(2kh)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(C + \frac{\omega 2kh}{k \sinh(2kh)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(C + C \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \\
 \frac{d\omega}{dk} &= C \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)
 \end{aligned}$$

Energie de la houle (1/2)

Quel est l'énergie cinétique et potentielle contenue dans une longueur d'onde L à un instant t fixé?

Energie de la houle (1/2)

Quel est l'énergie cinétique et potentielle contenue dans une longueur d'onde L à un instant t fixé?

L'énergie totale E se décompose en une contribution cinétique E_C et une contribution potentielle E_P :

$$E = E_C + E_P$$

Energie cinétique contenue dans une longueur d'onde. On fixe $t = 0$ arbitrairement.

$$E_C = \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) dz dx = \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) dz dx + o(\epsilon)$$

$$E_C = \frac{1}{2L} \rho \frac{a^2 \omega^2}{\sinh^2(kh)} \int_0^L \int_{-h}^0 (\cosh^2(k(z+h)) \sin^2(kx) + \sinh^2(k(z+h)) \cos^2(kx)) dz dx$$

$$\cosh^2(k(z+h)) = \frac{1}{2} (1 + \cosh(2k(z+h))) \text{ et } \sinh^2(k(z+h)) = -\frac{1}{2} (1 - \cosh(2k(z+h))) \dots$$

$$E_C = \frac{1}{4} \rho g a^2$$

Energie de la houle (2/2)

Energie potentielle contenue dans une longueur d'onde. On fixe $t = 0$ arbitrairement.

$$E_P^{Totale} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^{\eta} \rho g z dz dx = \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 \rho g z dz dx + \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{\eta} \rho g z dz dx$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=E_P^{repos}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=E_P}$$

$$\text{Donc } E_P = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{\eta} \rho g z dz dx = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \rho g \eta^2 dx = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \rho g a^2 \sin^2(kx) dx$$

$$\int_0^L \sin^2(kx) dx = \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_P = \frac{1}{4} \rho g a^2}$$

Il y a équiartition de l'énergie cinétique et potentielle dans la houle linéaire

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{4} \rho g a^2 + \frac{1}{4} \rho g a^2 \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \rho g a^2}$$

Débit d'énergie (1/2)

Puissance = taux de transmission de l'énergie (Force x vitesse).

La seule force qui travaille dans ce problème est la pression : $p(x, z, t) = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$.

Calculons la Puissance moyenne des forces de pression sur une période de la Houle intégré dans un plan vertical :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^0 p(x, z, t) u(x, z, t) dz dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^0 \left(-\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} dz dt$$

ϕ fonction périodique sinusoïdale de période $T \Rightarrow$ premier terme nul

$$\text{Avec } \phi(x, z, t) = -\frac{a g \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$$

$$P = -\frac{\rho}{T} \int_0^T \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz dt$$

$$P = \frac{\rho a^2 g^2 k}{T \omega \cosh^2(kh)} \int_0^T \int_{-h}^0 \cosh^2(k(z+h)) \sin^2(kx - \omega t) dz dt$$

Débit d'énergie (2/2)

On choisit arbitrairement $x = 0$:

$$P = \frac{\rho a^2 g^2 k}{T \omega \cosh^2(kh)} \int_0^T \int_{-h}^0 \cosh^2(k(z+h)) \sin^2(-\omega t) dz dt$$

$$P = \frac{\rho a^2 g^2 k}{T \omega \cosh^2(kh)} \frac{T}{2} \int_{-h}^0 \cosh^2(k(z+h)) dz$$

$$P = \underbrace{\frac{\rho g a^2}{2}}_{=E} \underbrace{\frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)}_{=C_g} = E C_g$$

Où $C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)$ désigne la vitesse de groupe.

→ **Vitesse à laquelle l'énergie est transportée par l'onde**

Débit d'énergie : Application numérique

Application :

- 1 Calculer la puissance engendrée par une houle de 7 mètres de hauteur et de 14 seconde de période en faisant l'hypothèse de grande profondeur. Refaite le calcul pour la même houle mais à une profondeur de 30 mètres. Commentez.
- 2 Sachant qu'un réacteur nucléaire à une puissance de l'ordre de 1 GW, quelle largeur de littorale soumit à cette houle correspondrait à la puissance d'un réacteur nucléaire ?
- 3 Même questions pour une houle de 2 mètres de hauteur et de 10 seconde de période.

Débit d'énergie : Application numérique - Corrections

Application :

- ① Calculer la puissance engendrée par une houle de 7 mètres de hauteur et de 14 seconde de période en faisant l'hypothèse de grande profondeur. Refaite le calcul pour la même houle mais à une profondeur de 30 mètres. Commentez.

Grande profondeur :

Longueur d'onde : $L_0 = 305.76$ m (Cambrure: $H/L_0 = 0.0229$)

Celerite : $C_0 = 21.84$ m/s

Celerite de groupe : $C_{g0} = 10.92$ m/s

Puissance de la houle : $P_0 = 672.54$ kW/m

Profondeur 30 m:

Longueur d onde : $L = 215.41$ m (Cambrure : $H/L = 0.0325$)

Profondeur relative : $h/L = 0.14$

Celerite : $C = 15.39$ m/s

Celerite de groupe : $C_g = 12.52$ m/s

Puissance de la houle : $P_0 = 770.96$ kW/m

- ② Sachant qu'un réacteur nucléaire à une puissance de l'ordre de 1 GW, quelle largeur de littorale soumit à cette houle correspondrait à la puissance d'un réacteur nucléaire ?

Grande profondeur : $L_{h0} = 1487$ m

Profondeur 30m : $L_h = 1297$ m

Débit d'énergie : Application numérique - Corrections

Application :

- ③ Même questions pour une houle de 2 mètres de hauteur et de 10 seconde de période.

Grande profondeur :

Longueur d'onde : $L_0 = 156 \text{ m}$ (Cambrure: $H/L_0 = 0.0129$)

Celerite : $C_0 = 15.6 \text{ m/s}$

Celerite de groupe : $C_{g0} = 7.8 \text{ m/s}$

Puissance de la houle : $P_0 = 39.2 \text{ kW/m}$

Profondeur 30 m:

Longueur d onde : $L = 137.3 \text{ m}$ (Cambrure : $H/L = 0.014$)

Profondeur relative : $h/L = 0.21$

Celerite : $C = 13.73 \text{ m/s}$

Celerite de groupe : $C_g = 9.29 \text{ m/s}$

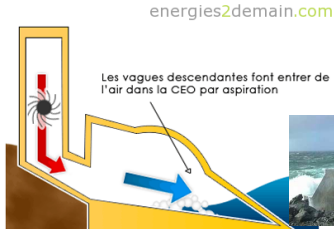
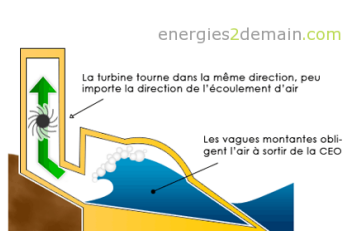
Puissance de la houle : $P_0 = 46.73 \text{ kW/m}$

Grande profondeur : $L_{h0} = 25500 \text{ m}$

Profondeur 30m : $L_h = 21399 \text{ m}$

Les différents système de récupération de l'énergie (1/2)

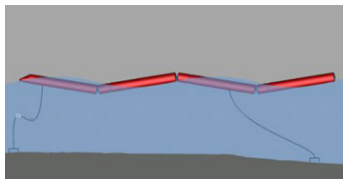
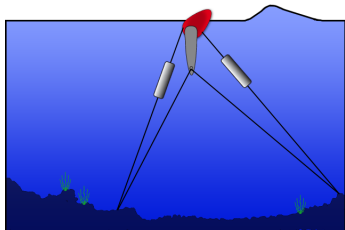
Colonne d'eau oscillante



Projet LIMPET
Ecosse

Dispositifs flottants : Batteurs et Radeaux articulés

energies2demain.com



source : <http://energies2demain.com/>

Projet Pelamis

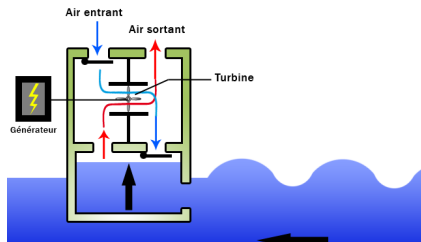
Les différents système de récupération de l'énergie (2/2)

Dispositifs ancrés

La vague remplit le bas du réservoir l'air comprimé dans la partie inférieure actionne une turbine. L'ensemble est construit au fond de la mer.

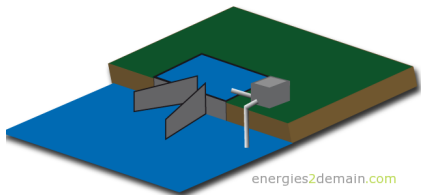
Ex.: Digue flottante de Monaco

energies2demain.com



Système à canaux

Les systèmes à canaux entonnoirs fonctionnent de manière très semblable à celle d'une centrale hydroélectrique, les vagues sont orientées vers un réservoir surélevé, sur le rivage, par un canal évasé dont l'ouverture la plus large s'ouvre sur l'océan.



energies2demain.com

source : <http://energies2demain.com/>

Exercice n° 4

Une onde de période temporelle $T = 10 \text{ s}$, se propage vers la côte sur un fond en pente douce depuis une profondeur de 200 m jusqu'à une profondeur de 3 m. Déterminez la longueur d'onde L aux profondeurs de 200 m et 3 m.

Exercice n° 5

Considérons une houle de période $T = 8 \text{ s}$ et de hauteur $H = 5.5 \text{ m}$ se propageant sur une étendue maritime de profondeur constante égale à 15 m.

- 1 Calculer le nombre d'onde k et la célérité C de la houle.
- 2 Donner les expressions des deux composantes de la vitesse et de l'accélération.
- 3 Calculer la valeur maximale de chacune de ces grandeurs.

Exercice n° 6

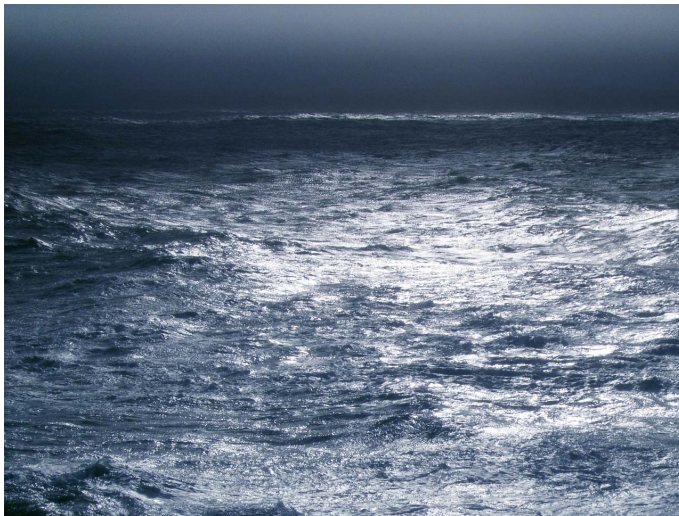
Un champ de houle est observé par satellite. La longueur d'onde dominante est estimée à 314 m au-dessus de la plaine abyssale et à 200 m au-dessus du plateau continental. Quelle est la profondeur d'eau moyenne sur le plateau continental ?

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 **Description des états de mer**
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Description probabiliste des états de mer réels

La nature chaotique de la surface de l'océan rend impossible la prédiction déterministe des vagues individuellement.



Vagues irrégulières

Deux approches existent:

1) Méthode vague-à-vague:

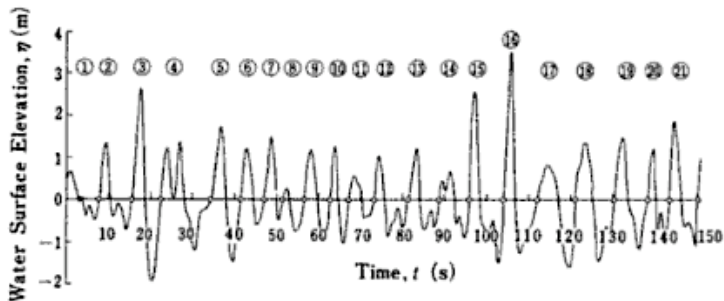
Dans cette méthode, une série temporelle en un point est utilisée, les ondulations sont identifiées à des vagues et des analyses statistiques sont développées. Cette approche est assez intuitive et sera présentée en première. L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle ne donne aucune indication sur la direction de propagation des vagues. En effet, ce qui apparaît comme une vague unique peut, en fait, être la superposition de deux vagues plus petites de directions différentes.

2) Méthode spectrale:

L'approche spectrale est basée sur la transformée de Fourier de la surface libre. C'est la méthode mathématique la plus appropriée pour analyser un état de mer tridimensionnelle instationnaire. Malheureusement, cette méthode est extrêmement complexe et coûteuse et de tels mesures n'existent pas aujourd'hui. Cependant, il existe des approches simplifiées qui sont très utiles.

Coastal Engineering Manual p.II-1-64

Méthode vague-à-vague (1/4)



La série est découpée en vagues suivant la méthode du "Zero up-crossing"

- ① La hauteur moyenne sur la série est calculée puis retranchée de la série $\eta(t)$:
 \Rightarrow Oscillations de la SL autour de zéro
- ② On cherche les instants où la surface libre passe au-dessus de zéro en montant :
 \Rightarrow Une vague est définie comme le tronçon entre deux instants successifs :
 La période correspond à la durée entre ces points
 La hauteur correspond à la différence $H = \eta_{max} - \eta_{min}$

Méthode vague-à-vague (2/4)

Wave number	Wave height H (m)	Wave period T (s)	Order number m	Wave number	Wave height H (m)	Wave period T (s)	Order number m
1	0.54	4.2	21	12	1.95	8.0	15
2	2.05	8.0	12	13	1.97	7.6	14
3	4.52	6.9	2	14	1.62	7.0	18
4	2.58	11.9	8	15	4.08	8.2	3
5	3.20	7.3	4	16	4.89	8.0	1
6	1.87	5.4	17	17	2.43	9.0	9
7	1.90	4.4	16	18	2.83	9.2	7
8	1.00	5.2	20	19	2.94	7.9	6
9	2.05	6.3	13	20	2.23	5.3	11
10	2.37	4.3	10	21	2.98	6.9	5
11	1.03	6.1	19				

Les vagues et leurs caractéristiques sont synthétisées dans le tableau ci-dessus. La dernière colonne correspond au classement suivant la hauteur des vagues. De cette analyse on peut déduire des paramètres de vagues représentatives :

$$\Rightarrow H_{max}, H_{1/10}, H_{1/3} \text{ et } \bar{H}$$

$$\Rightarrow T_{max}, T_{1/10}, T_{1/3} \text{ et } \bar{T}$$

Méthode vague-à-vague (3/4)

Wave number	Wave height H (m)	Wave period T (s)	Order number m
1	0.54	4.2	21
2	2.05	8.0	12
3	4.52	6.9	2
4	2.58	11.9	8
5	3.20	7.3	4
6	1.87	5.4	17
7	1.90	4.4	16
8	1.00	5.2	20
9	2.05	6.3	13
10	2.37	4.3	10
11	1.03	6.1	19

Wave number	Wave height H (m)	Wave period T (s)	Order number m
12	1.95	8.0	15
13	1.97	7.6	14
14	1.62	7.0	18
15	4.08	8.2	3
16	4.89	8.0	1
17	2.43	9.0	9
18	2.83	9.2	7
19	2.94	7.9	6
20	2.23	5.3	11
21	2.98	6.9	5

H_{max}, T_{max} : **Vague la plus haute**

→ Dans le tableau précédent il s'agit de la 16^{ème} vague : $H_{max} = 4.9$ m,
 $T_{max} = 8.0$ s

$H_{1/10}, T_{1/10}$: **Vague un dixième**

→ Ces 2 grandeurs correspondent à la moyenne du dixième des vagues les plus hautes : $H_{1/10} = 4.7$ m, $T_{1/10} = 7.5$ s (ici 2 vagues sur 21 : 3 et 16)

Méthode vague-à-vague (4/4)

Wave number	Wave height H (m)	Wave period T (s)	Order number m
1	0.54	4.2	21
2	2.05	8.0	12
3	4.52	6.9	2
4	2.58	11.9	8
5	3.20	7.3	4
6	1.87	5.4	17
7	1.90	4.4	16
8	1.00	5.2	20
9	2.05	6.3	13
10	2.37	4.3	10
11	1.03	6.1	19

Wave number	Wave height H (m)	Wave period T (s)	Order number m
12	1.95	8.0	15
13	1.97	7.6	14
14	1.62	7.0	18
15	4.08	8.2	3
16	4.89	8.0	1
17	2.43	9.0	9
18	2.83	9.2	7
19	2.94	7.9	6
20	2.23	5.3	11
21	2.98	6.9	5

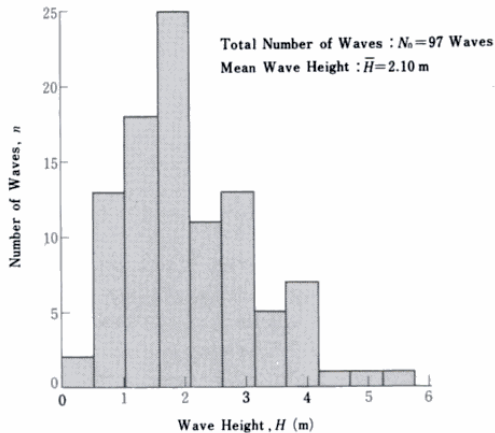
$H_{1/3}, T_{1/3}$: **Vague un tiers ou vague significative**

→ Ces 2 grandeurs correspondent à la moyenne du tiers des vagues les plus hautes : $H_{1/3} = 3.6$ m, $T_{1/3} = 7.8$ s (ici 7 vagues sur 21)

→ Ce sont les paramètres les plus utilisés dans la pratique car ils correspondent aux valeurs estimées visuellement par un observateur.

\bar{H}, \bar{T} : **Vague moyenne** → $\bar{H} = 2.4$ m, $\bar{T} = 7.0$ s

Distribution de Hauteurs et de Périodes des vagues (1/2)



Les vagues de la série précédente sont classées par catégorie de taille sous forme d'histogramme par tranche de 0.525 m de hauteur.

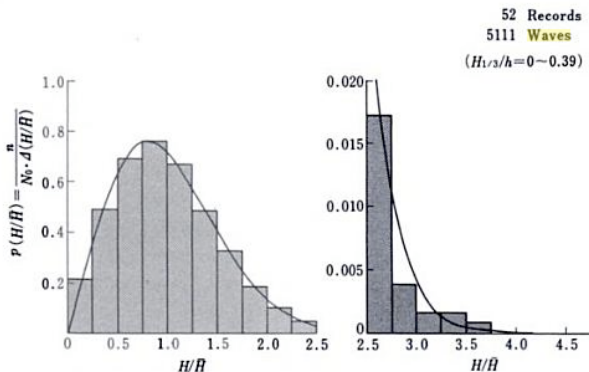
On voit clairement un pic entre 1.57 m et 2.1 m qui ne correspond pas à la moyenne : $\bar{H} = 2.4$ m.

Les vagues les plus "fréquentes" sont plus petites que la "vague moyenne".

Distribution de Hauteurs des vagues (1/5)

Pour un enregistrement contenant plus de vagues (52 enregistrements de 100 vagues)
l'histogramme est beaucoup plus régulier.

- H/\bar{H} : hauteur adimensionnée par la hauteur moyenne (pour chaque enregistrement)
- $p(H/\bar{H}) = n/(N_0 \Delta(H/\bar{H}))$: fréquence relative.
 n : nombre de vagues dans la classe $\Delta(H/\bar{H})$
 N_0 : nombre total de vagues dans la série
 $\Delta(H/\bar{H})$ largeur de la classe de hauteur de vague normalisée considérée.



Distribution de Hauteurs des vagues (2/5)

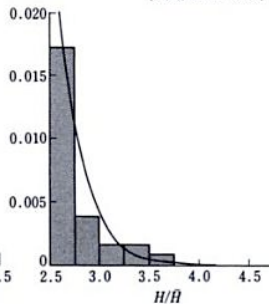
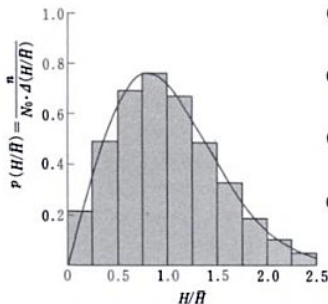
Le trait plein représente la distribution de Rayleigh : $p(x) = \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4} x^2}$ avec $x = H/\bar{H}$. Cette distribution représente bien la distribution des hauteurs de vagues pour une houle aléatoire.

$p(x)$ est la fonction densité de probabilité : la probabilité qu'une vague de hauteur normalisée comprise entre x et $x + dx$ se produise est égale à $p(x) dx$.

Probabilité qu'une vague de hauteur $\in [0; \infty]$ est de 100%

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = 1$$

52 Records
5111 Waves
($H_{1/3}/h = 0 - 0.39$)



Distribution de Hauteurs des vagues (3/5)

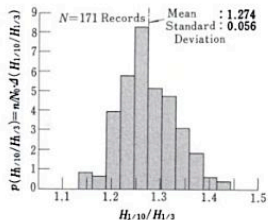


Fig. 2.5. Histogram of the wave height ratio $H_{1/10}/H_{1/3}$.⁴

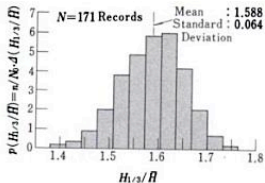


Fig. 2.6. Histogram of the wave height ratio $H_{1/10}/\bar{H}$.⁴

On définit également la probabilité cumulée :

$$P(x) = \int_x^{\infty} p(\xi) d\xi$$

qui représente la probabilité qu'une vague de hauteur supérieure à x se produise.

Avec $p(x) = \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4} x^2}$ on obtient :

$$P(x) = e^{-\frac{\pi}{4} x^2} \quad (\text{Longuet-Higgins, 1952})$$

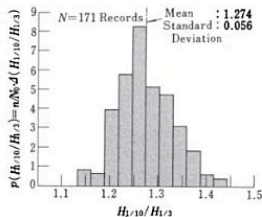
La hauteur de vague minimum correspondant à une probabilité de $1/N$ est donc :

$$P(\tilde{x}_{1/N}) = 1/N \Leftrightarrow \tilde{x}_{1/N} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \ln(N)}$$

Pour $N=10$: la hauteur de la plus petite vague ayant une probabilité de $1/10$ est $\sqrt{\frac{4}{\pi} \ln(10)} \bar{H}$

Distribution de Hauteurs des vagues (4/5)

La hauteur moyenne des $1/N$ vagues les plus hautes est donné par :



$$x_{1/N} = \frac{\int_{\tilde{x}_{1/N}}^{\infty} \xi p(\xi) d\xi}{\int_{\tilde{x}_{1/N}}^{\infty} p(\xi) d\xi} = \frac{\int_{\tilde{x}_{1/N}}^{\infty} \xi p(\xi) d\xi}{1/N}$$

Fig. 2.5. Histogram of the wave height ratio $H_{1/10}/H_{1/3}$.⁴

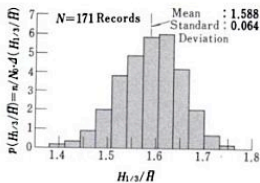
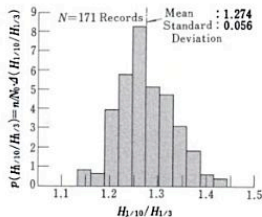


Fig. 2.6. Histogram of the wave height ratio $H_{1/10}/\bar{H}$.⁴

Distribution de Hauteurs des vagues (4/5)

La hauteur moyenne des $1/N$ vagues les plus hautes est donné par :



$$x_{1/N} = \frac{\int_{\tilde{x}_{1/N}}^{\infty} \xi p(\xi) d\xi}{\int_{\tilde{x}_{1/N}}^{\infty} p(\xi) d\xi} = \frac{\int_{\tilde{x}_{1/N}}^{\infty} \xi p(\xi) d\xi}{1/N}$$

Mais

$$\int_{\tilde{x}_{1/N}}^{\infty} \xi p(\xi) d\xi = \tilde{x}_{1/N} + \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tilde{x}_{1/N} \right)$$

qui doit être résolu numériquement !!!

Pour $N=3$ et $N=10$:

$$\text{Pour } x_{1/3} : H_{1/3} = 1.6 \bar{H}$$

$$\text{Pour } x_{1/10} : H_{1/10} = 2.03 \bar{H} = 1.27 H_{1/3}$$

$$\text{Rappel : } x = H/\bar{H}$$

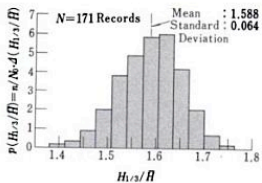


Fig. 2.6. Histogram of the wave height ratio $H_{1/10}/\bar{H}$.⁴

Distribution de Hauteurs des vagues (5/5)

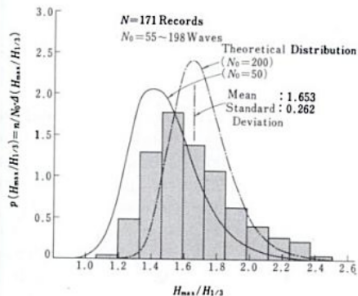


Fig. 2.7. Histogram of the wave height ratio $H_{max}/H_{1/3}$.⁴

La relation entre H_{max} et $H_{1/3}$ peut également être obtenu à partir de la distribution de Rayleigh.

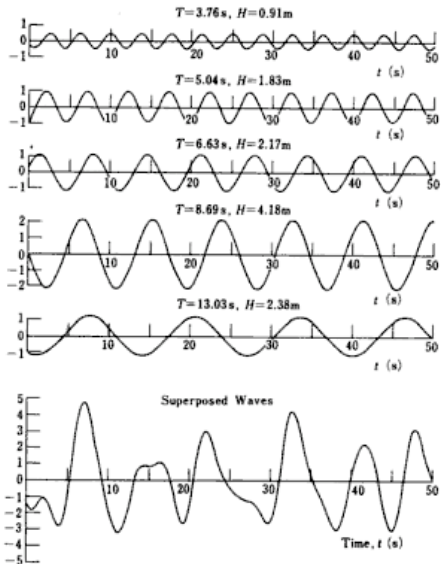
Problème : H_{max} représente une vague individuelle dans une série, il varie donc d'une série à l'autre et il est impossible de prédire sa valeur pour une série donnée.

Tout ce que l'on peut faire c'est de considérer une fonction de distribution pour le rapport $H_{max}/H_{1/3}$. On s'aperçoit clairement que la distribution dépend fortement du nombre de vagues dans la série (N_0).

$$\left. \frac{H_{max}}{H_{1/3}} \right|_{mode} = 0.706 \sqrt{\ln(N_0)}$$

⇒ Problème pour la conception d'ouvrage : quelle valeur de H_{max} faut-il prendre ?
 Dans la pratique on prend $H_{max} \geq 2 H_{1/3}$

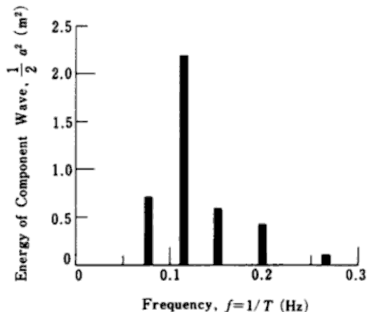
Méthode spectrale (1/4)



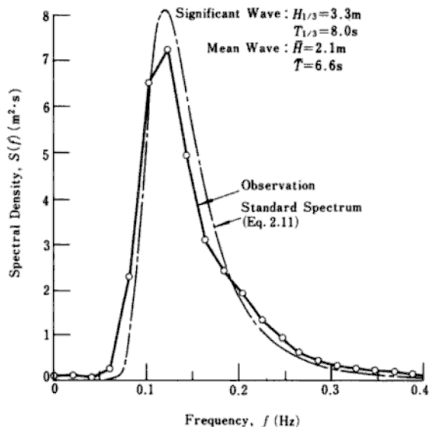
Profil de vagues obtenus par superposition de 5 composantes sinusoïdales de hauteurs et de périodes différentes.

En augmentant le nombre de composantes on peut obtenir des profils de vagues beaucoup plus irrégulier.

On peut également obtenir le spectre de cette série (Transformé de Fourier) où chaque composante est représentée par son énergie : $\frac{1}{2} a_i^2$.



Méthode spectrale (2/4)



(Bretschneider, 1968)

A partir de l'enregistrement de vague utilisé au début de ce cours, on peut obtenir le **spectre en fréquence** ou plus précisément la **fonction de densité spectrale en fréquence**: $S(f)$ exprimée en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$.

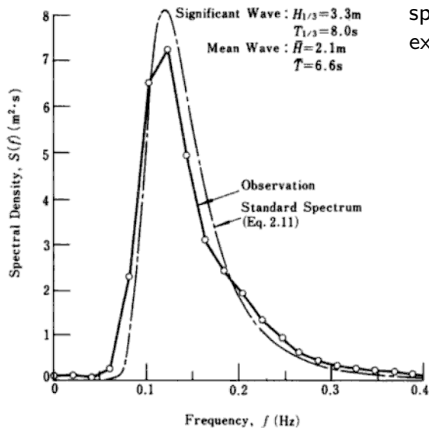
Ce spectre montre que l'énergie est contenu dans la bande $f \in [0.05 ; 0.4] \text{ Hz}$ ou $T \in [2.5 ; 20] \text{ s}$

La fréquence du pic est de $f_p = 0.12 \text{ Hz}$ ($T_p=8,33 \text{ s}$) qui est légèrement différente de la fréquence significative $f_{1/3} = 0.125 \text{ Hz}$ ($T_{1/3}=8 \text{ s}$)

A partir de l'analyse d'un très grand nombre de mesures de vagues partout dans le monde on peut tenter de déterminer une forme générale du spectre de vague :

$$S(f) = 0.257 \frac{H_{1/3}^2 T_{1/3}}{(T_{1/3} f)^5} e^{-\frac{1.03}{(T_{1/3} f)^4}}$$

Méthode spectrale (3/4)



Il existe un grand nombre d'expressions pour ce spectre de vagues (≥ 1950 's), les deux expressions les plus connues sont :

- Pierson-Moskowitz (1964) : North Atlantic

$$S(f) = \frac{A g^2}{\omega^5} e^{-\frac{B g^4}{(U \omega)^4}}$$

où U représente la vitesse du vent à 19.5 m au-dessus de la surface, $A = 8.10^{-3}$ et $B = 0.74$

- JONSWAP (Hasselmann et al., 1973) : Mer du Nord

$$S(f) = \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4 f^5} e^{-1.25 \left(\frac{f_m}{f}\right)^4} \gamma^{\exp(-(f-f_m)^2 / 2 (\sigma f_m)^2)}$$

Méthode spectrale (4/4)

Lorsqu'une houle coexiste avec la mer du vent, un pic secondaire apparaît dans le spectre. De la même manière plusieurs pics peuvent coexister chacun correspondant à une contribution différentes.

La houle se propage dans toutes les directions a priori, il existe donc un spectre directionnel :

$$S(f, \theta) = S(f) G(f, \theta)$$

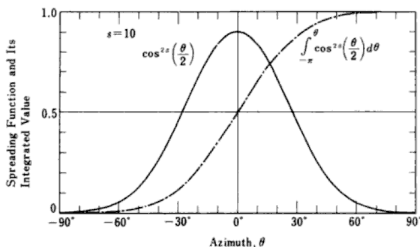
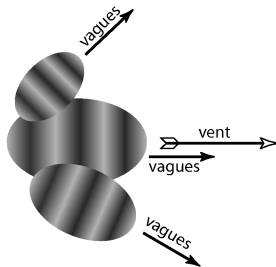
où $G(f, \theta)$ représente la fonction de distribution angulaire qui vérifie

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(f, \theta) d\theta = 1$$

Elle ne possède pas de dimension.

$$G(f, \theta) = G_0 \cos^{2s} \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

(Mitsuyasu et al, 1975)



Relation entre Spectre et Paramètres caractéristiques des vagues (1/3)

Les deux représentations des états de mers données précédemment (vagues caractéristiques et spectre) peuvent paraître très différentes mais représentent néanmoins le même phénomène. Il est possible d'établir des relations entre ces deux approches.

Moment d'ordre 0 ou variance du spectre de vague : m_0 (en m^2)

$$m_0 = \int_0^{\infty} S(f) df \quad [m^2]$$

A partir de considération dimensionnelle on peut définir une échelle de hauteur de vague $\sqrt{m_0}$ et une énergie : $E_S = \rho g m_0$

Energie potentielle contenu dans la série temporelle :

$$E_p = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} \frac{1}{2} \rho g \eta^2 dt = \rho g \frac{\overline{\eta^2}}{2}$$

Variance des vagues aléatoires : $\frac{\overline{\eta^2}}{2}$

Lien entre spectre et hauteur de vagues :

$$m_0 = \overline{\eta^2}/2 = \eta_{rms}^2/2 \quad \Rightarrow \quad \eta_{rms} = \sqrt{2} \sqrt{m_0}$$

Relation entre Spectre et Paramètres caractéristiques des vagues (2/3)

On peut réécrire cette relation pour H_{rms} :

$$H_{rms} = 2 \eta_{rms} = 2 \sqrt{2} \sqrt{m_0}$$

Cette valeur rms impose une certaine relation avec les hauteurs représentative si les hauteurs de vagues suivent une distribution de Rayleigh :

$$H_{1/3} \approx \sqrt{2} H_{rms} = 4 \sqrt{m_0}$$

Cette dépendance a été confirmée par de nombreuses observations de vagues présent partout dans le monde. Mais la valeur du coefficient de proportionnalité (4.00) dépend de différents facteurs comme la profondeur ou le degré de non-linéarité.

D'après le spectre de vagues on peut également obtenir la période ou la fréquence de pic spectral : T_p ou f_p .

D'après Goda (1983), $f_p T_{1/3} \approx 0.95$ en moyenne.

On peut également obtenir la période moyenne : \bar{T}

$$\bar{T} = \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \quad \text{où} \quad m_2 = \int_0^{\infty} f^2 S(f) df \quad [m^2/s^2]$$

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Génération des ondes par le vent : Mécanismes (1/3)

La formation et la croissance des vagues sous l'effet du vent est un phénomène complexe qui reste encore assez mal compris, et sur lequel la recherche reste active.

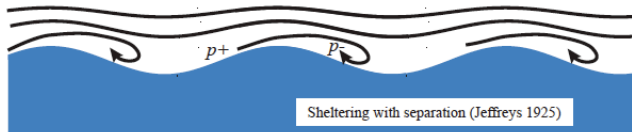
Principe :

- L'énergie du vent est transmise à la surface de l'eau par les contraintes (pression et cisaillement)
- L'énergie des vagues est dissipée principalement par le déferlement (récupérée par la turbulence océanique) et le frottement au fond

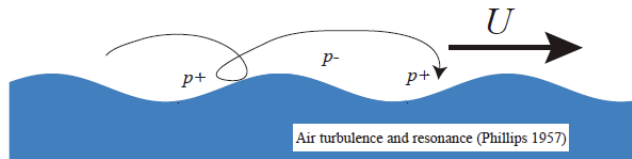
Les différents modèles théoriques :

- Effet de stratification → Instabilité de Kelvin-Helmoltz (1888)
- Effet de décollement → Différence de pression entre les faces au vent et sous le vent (Jeffreys, 1924)
- Effet de la turbulence du vent → Résonance de la SL au forçage aléatoire de la pression atmosphérique (turbulence) (Philips, 1957)
- Couplage vent-vagues → Les contraintes de cisaillement et normale exercées par le vent sur la SL sont modifiées par la présence des vagues : fluctuations de pression en quadrature avec l'élévation (Miles, 1957 ; Janssen, 1991)
- ...

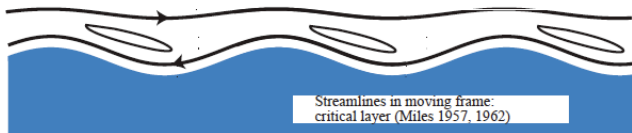
Génération des ondes par le vent : Mécanismes (2/3)



**Supression au vent /
Dépression sous le vent:**
Explique le transfert
d'énergie pour les vagues
déjà formées



Fluctuations de pression:
Explique la formation des
rides (initiation)



**Couche limites au dessus
de vagues en mouvement:**
Le mécanisme proposé par
Jeffrey est observé mais
au-dessus d'une hauteur
critique.

Sources : Wikipedia / Fabrice Ardhuin (SHOM)

Génération des ondes par le vent : Mécanismes (3/3)

Imaginez qu'un vent sensible se mette à souffler sur une mer lisse comme un miroir. Trois processus physiques différents vont se produire successivement:

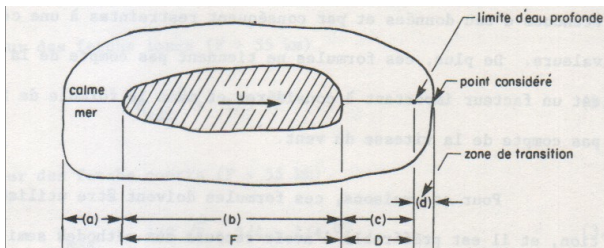
- 1 La turbulence du vent génère des fluctuations aléatoires de pression sur la surface de l'eau qui produisent des petites vagues de longueurs d'ondes centimétriques (Phillips 1957).
- 2 Ensuite, le vent agit sur ces petites vagues les faisant grossir. Lorsque le vent souffle sur ces vagues les différences de pression le long du profil de vague entre les faces au vent et sous le vent font croître les vagues. Ce processus est instable car, lorsque les vagues deviennent plus grosses, la différence de pression augmente et donc les vagues grossissent plus vite. Cette instabilité fait grossir les vagues exponentiellement (Miles 1957).
- 3 Enfin, les vagues commencent à interagir entre elles et à produire des vagues de plus grande longueur d'onde (Hasselmann et al. 1973). Cette interaction transfère de l'énergie des vagues courtes générées par le mécanisme de Miles vers des ondes de fréquence légèrement plus basse que la fréquence des vagues au pic spectral. Finalement, ce mécanisme conduit à des vagues qui vont plus vite que le vent (Pierson and Moskowitz).

Source: http://www.wikiwaves.org/Ocean-Wave_Spectra

Génération des ondes par le vent : Prédiction (1/4)

→ Les théories évoquées précédemment permettent de comprendre les mécanismes mais ne permettent pas de prédire quantitativement les états de mers pour un vent et une géométrie données.

→ Une alternative consiste à utiliser des relations semi-empiriques ou empiriques



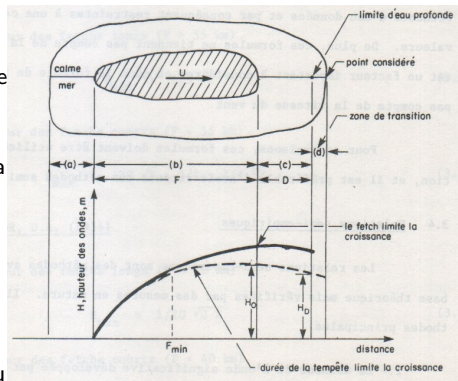
3 facteurs influencent la génération de la houle :

- La vitesse du vent (U)
- La durée d'action (t)
- Le fetch ou distance d'action (F)

Génération des ondes par le vent : Prédiction (2/4)

Lorsque le vent souffle les vagues se développent et croissent dans la direction du vent

- Si le vent ne souffle pas assez longtemps, les vagues atteignent leurs hauteurs maximales avant la fin du fetch :
 $\Rightarrow \exists$ un fetch minimale F_{min} pour la durée du vent considérée.
- Si le vent souffle assez longtemps et que la hauteur des vagues n'atteint pas son maximum à la fin du fetch :
 $\Rightarrow \exists$ un temps d'action minimale t_{min} pour la longueur du fetch considérée.
- Si la croissance des vagues n'est ni limitée par la durée d'action, ni par la longueur du fetch mais par la vitesse du vent alors on a à faire à une **"mer complètement levée"**.



Génération des ondes par le vent : Prédiction (3/4)

Historiquement, les premiers **modèles** de prédictions étaient **empiriques** :

① Stevenson (1864)

- Fetchs longs ($F > 55 \text{ km}$) : $H_{max} = \frac{1}{3}\sqrt{F}$
- Fetchs courts ($F < 55 \text{ km}$) : $H_{max} = \frac{1}{3}\sqrt{F} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}F^{1/4}$

② Molitor (1934)

- Fetchs longs ($F > 40 \text{ km}$) : $H_{max} = \frac{1}{20}\sqrt{U F}$
- Fetchs courts ($F < 40 \text{ km}$) : $H_{max} = \frac{1}{20}\sqrt{U F} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}F^{1/4}$

③ Sverdrup, Munk and Bretschneider (1957)

- Fetchs Courts et grandes vitesses de vent : $H_{1/3} = \frac{1}{40}U \sqrt{F}$ et $T_{1/3} = \frac{1}{5}\sqrt{U F}^{1/4}$
- Fetchs longs : méthodes semi-empiriques

avec • H : hauteur de la houle (m)

• U : Vitesse du vent (m/s)

• F : Fetch (km)

Génération des ondes par le vent : prédiction (4/4)

Par la suite, des **modèles** de prédictions **semi-empiriques** ont été proposés :

① Méthode de l'onde significative

Sverdrup and Munk (1947) et Bretschneider (1954)

Connaissant les valeurs de U , t et F on détermine à partir de l'analyse dimensionnelle et d'une calibration sur des mesures les grandeurs significatives de la houle : $H_{1/3}$ et T_p .

② Méthode du spectre d'ondes

Pierson, Neumann and James et Pierson and Moskowitz

Connaissant la vitesse du vent on déduit le spectre d'énergie des ondes à partir duquel on peut revenir aux grandeurs significatives de la houle : $H_{1/3}$ et T_p (Cf partie description des états de mers).

Méthode de l'onde significative

Nous avons vu qu'il y a :

- 3 facteurs influençant la génération de la houle : U_A , t et F
- 1 constante fondamentale : g
- 2 paramètres de la houle à déterminer : $H_{1/3}$ et T_p

D'où $H_{1/3} = f_1(U_A, F, t, g)$ et $T_p = f_2(U_A, F, t, g)$

Analyse dimensionnelle (Th. Vaschy-Buckingham)

→ 6 paramètres ($U_A, F, t, g, H_{1/3}, T_p$) et 2 unités (Longueur, Temps)

⇒ 4 produits adimensionnels : $\frac{gH_{1/3}}{U_A^2}$, $\frac{gT_p}{U_A}$, $\frac{gF}{U_A^2}$ et $\frac{gt}{U_A}$

Enfinement : $\frac{gH_{1/3}}{U_A^2} = f_1\left(\frac{gF}{U_A^2}, \frac{gt}{U_A}\right)$ et $\frac{gT_p}{U_A} = f_2\left(\frac{gF}{U_A^2}, \frac{gt}{U_A}\right)$

Méthode de l'onde significative en eau profonde (Shore Protection Manual)

Formule en Fetch limité : (F, U_A)

$$\frac{gH_{1/3}}{U_A^2} = 1.6 \cdot 10^{-3} \left(\frac{gF}{U_A^2} \right)^{1/2} \quad \rightarrow \quad H_{1/3} = 5.112 \cdot 10^{-4} U_A F^{1/2}$$

$$\frac{gT_p}{U_A} = 2.857 \cdot 10^{-1} \left(\frac{gF}{U_A^2} \right)^{1/3} \quad \rightarrow \quad T_p = 6.238 \cdot 10^{-2} (U_A F)^{1/3}$$

$$\frac{gt}{U_A} = 6.88 \cdot 10^1 \left(\frac{gF}{U_A^2} \right)^{2/3} \quad \rightarrow \quad t = 3.215 \cdot 10^1 \left(\frac{F^2}{U_A} \right)^{1/3}$$

Formule mer complètement levée

$$\frac{gH_{1/3}}{U_A^2} = 2.433 \cdot 10^{-3} \quad \rightarrow \quad H_{1/3} = 2.482 \cdot 10^{-2} U_A^2$$

$$\frac{gT_p}{U_A} = 8.134 \quad \rightarrow \quad T_p = 8.3 \cdot 10^{-1} U_A$$

$$\frac{gt}{U_A} = 7.15 \cdot 10^4 \quad \rightarrow \quad t = 7.296 \cdot 10^3 U_A$$

Attention !!!

La vitesse du vent est ajustée : $U_A = 0.71 U^{1.23}$ où $U = U(z = 10m)$ en m/s

La période significative $T_{1/3}$ est relié à la période pic par $T_{1/3} = 0.95 T_p$

Le Fetch est exprimé en m

Méthode de l'onde significative

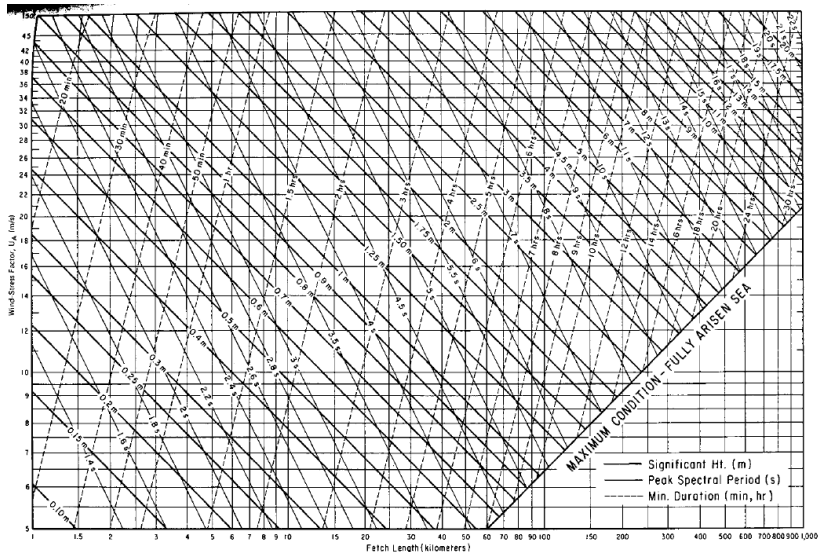


Figure 3-23. Nomograms of deepwater significant wave prediction curves as functions of windspeed, fetch length, and wind duration (metric units).

Bretschneider (1954) revisité par Hasselman *et al.* (1976)

Méthode de l'onde significative

Déterminer $H_{1/3}$, T_p pour un vent de 10 m/s soufflant sur 200 km pendant une durée de 12 h

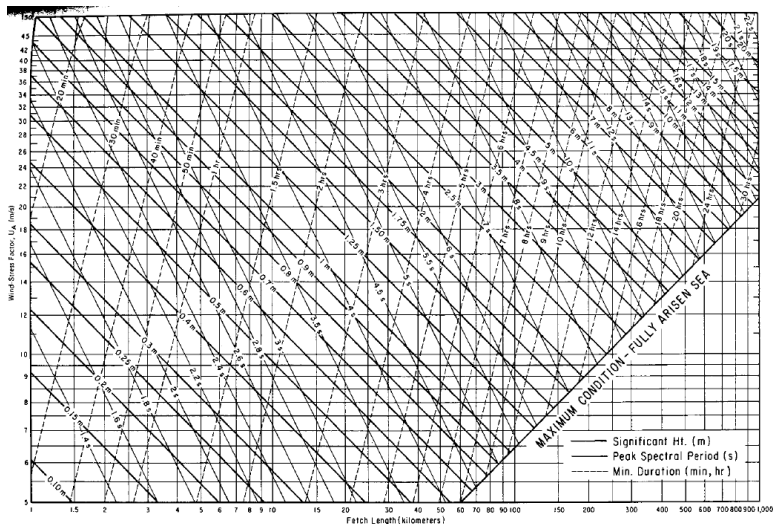


Figure 3-23. Nomograms of deepwater significant wave prediction curves as functions of windspeed, fetch length, and wind duration (metric units).

Méthode de l'onde significative

Déterminer $H_{1/3}$, T_p pour un vent de 10 m/s soufflant sur 200 km pendant une durée de 12 h

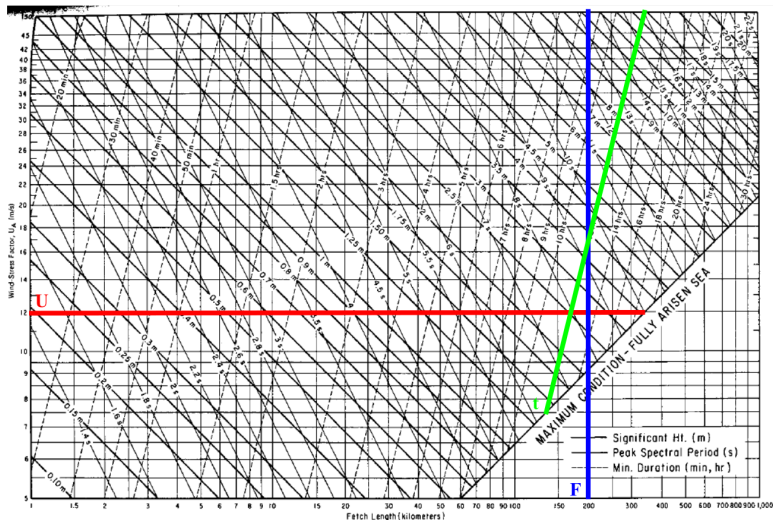


Figure 3-23. Nomograms of deepwater significant wave prediction curves as functions of windspeed, fetch length, and wind duration (metric units).

Méthode de l'onde significative

La vitesse du vent ajustée U_A est obtenue par :

$$U_A = 0.71 U^{1.23}$$

$$\rightarrow U_A = 12 \text{ m/s}$$

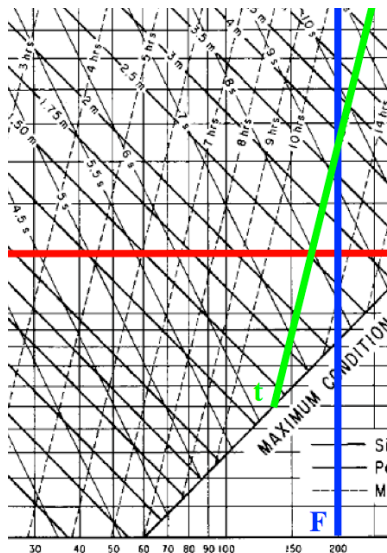
Le facteur limitant est la durée d'action du vent, le fetch mini pour cette durée d'action est compris entre 150 et 200 km

→ la première courbe intersectée est la courbe verte correspondant à la durée d'action

Par lecture graphique on déduit :

- $H_{1/3} = 2.5 \text{ m}$
- $T_p = 8 \text{ s}$ soit $T_{1/3} = 0.95 T_p = 7.6 \text{ s}$

Le SPM présente une version plus évoluée de cette méthode notamment pour l'estimation de la vitesse du vent. Cette approche reste assez qualitative, elle n'est utilisée qu'en phase d'avant projet ou lorsque les données sur le site sont inexistantes.



Méthode de l'onde significative

Déterminer $H_{1/3}$, T_p pour un vent de 10 m/s soufflant sur 200 km pendant une durée de 24 h

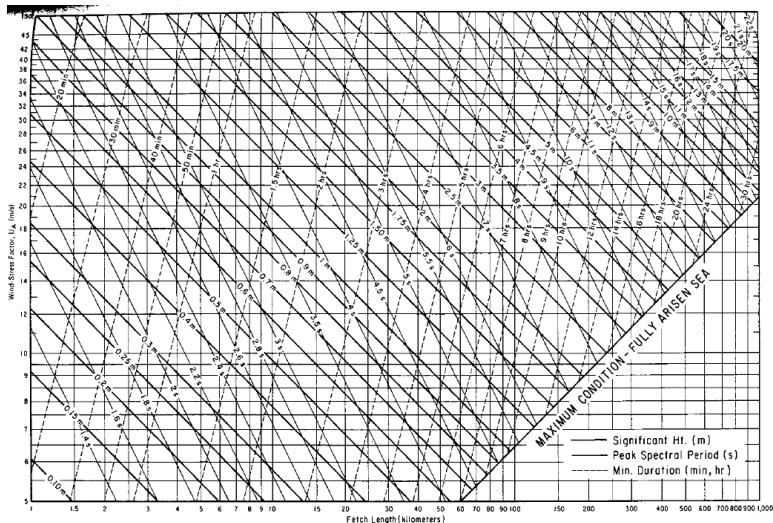


Figure 3-23. Nomograms of deepwater significant wave prediction curves as functions of windspeed, fetch length, and wind duration (metric units).

Méthode de l'onde significative

Déterminer $H_{1/3}$, T_p pour un vent de 10 m/s soufflant sur 200 km pendant une durée de 24 h

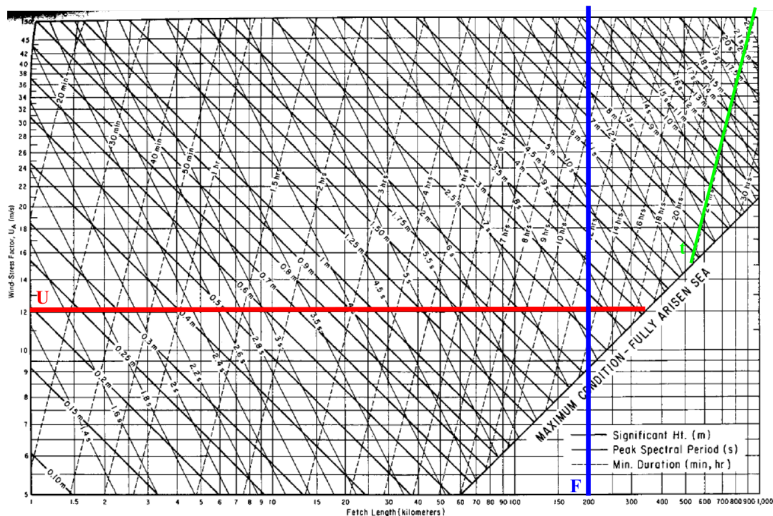


Figure 3-23. Nomograms of deepwater significant wave prediction curves as functions of windspeed, fetch length, and wind duration (metric units).

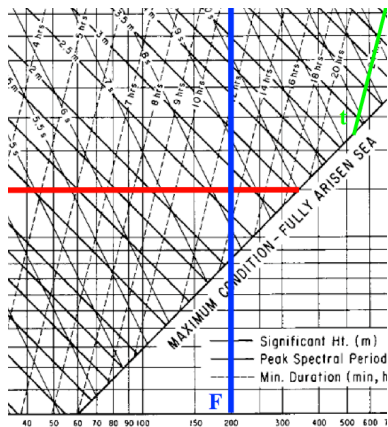
Méthode de l'onde significative

Le facteur limitant est cette fois le Fetch, la durée d'action mini pour ce Fetch est compris entre 13 et 14 H

→ la première courbe intersectée est la courbe bleu correspondant au Fetch

Par lecture graphique on déduit :

- $H_{1/3} = 2.75 \text{ m}$
- $T_p = 8.5 \text{ s}$ soit $T_{1/3} = 0.95 T_p = 8.1 \text{ s}$



Méthode de l'onde significative

Déterminer $H_{1/3}$, T_p pour un vent de 10 m/s soufflant sur 400 km pendant une durée de 24 h

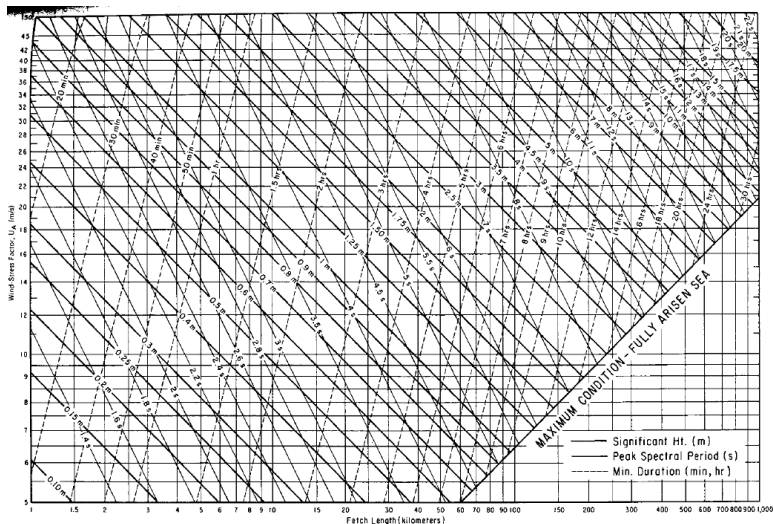


Figure 3-23. Nomograms of deepwater significant wave prediction curves as functions of windspeed, fetch length, and wind duration (metric units).

Méthode de l'onde significative

Déterminer $H_{1/3}$, T_p pour un vent de 10 m/s soufflant sur 400 km pendant une durée de 24 h

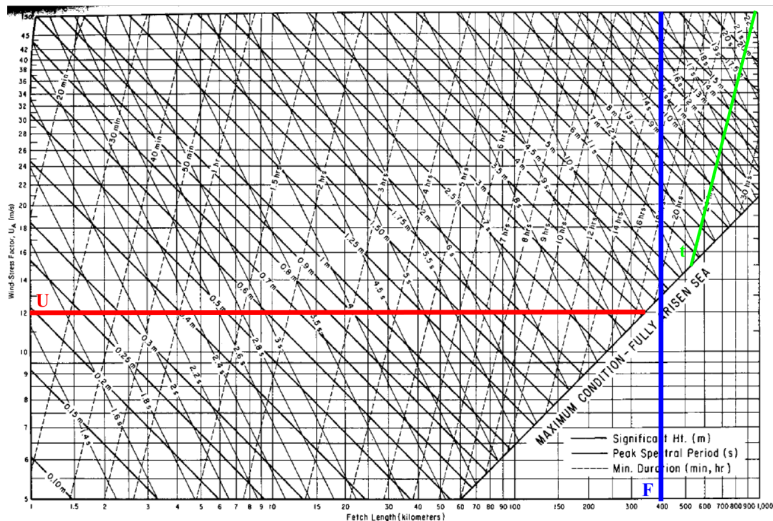


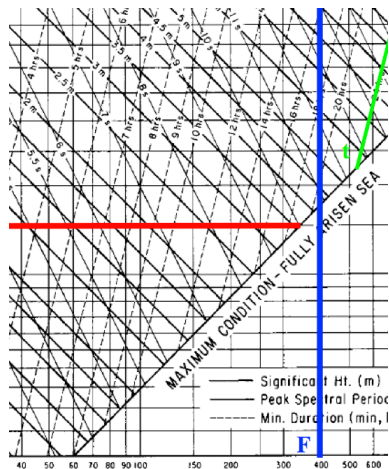
Figure 3-23. Nomograms of deepwater significant wave prediction curves as functions of windspeed, fetch length, and wind duration (metric units).

Méthode de l'onde significative

Le facteur limitant est cette fois la vitesse du vent elle-même, la mer est dite "complètement levée" c'est à dire que ni la durée d'action ni le Fetch ne limite la croissance des vagues

Par lecture graphique on déduit :

- $H_{1/3} = 3.6 \text{ m}$
- $T_p = 10 \text{ s}$ soit $T_{1/3} = 0.95 T_p = 9.5 \text{ s}$



Méthode de l'onde significative : Exercice d'application

Application :

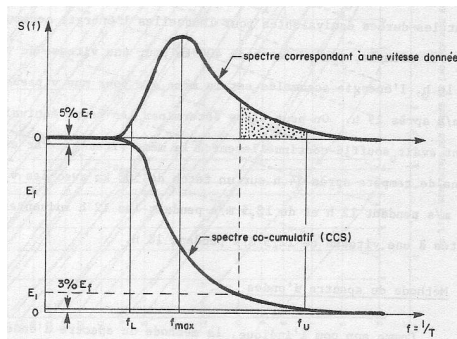
- 1 Déterminer les caractéristiques de la houle générée par un vent mesuré à 10 m soufflant à 24 m/s pendant 12 h sur un fetch de 400 km.
- 2 Même question si le fetch est de 100 km.

Méthode du spectre d'ondes

Nous avons vu dans la partie description probabiliste des états de mer réels qu'il est possible de décrire d'un point de vue statistique un état de mers par son spectre d'énergie (ici Pierson-Moskowitz) :

$$S(f) = \frac{8 \cdot 10^{-3} g^2}{(2\pi)^5 f^5} e^{-\frac{0.74 g^4}{(2\pi U f)^4}}$$

En intégrant ce spectre de f jusqu'à l'infini, on définit l'énergie totale accumulée pour des fréquences supérieures à f :



$$E(f) = \int_f^{\infty} S(f) df$$

$$H_{1/3} = 4.004 \sqrt{E(0)}$$

La valeur maximale de E pour une vitesse de vent U donné correspond à une mer complètement levée.

Méthode du spectre d'ondes

A partir de mesures in-situ, on a déterminer les relations entre le fetch minimale (F_{min}) et la vitesse du vent (U) ainsi qu'entre la durée minimale d'action du vent (t_{min}) et la vitesse du vent (U) :

- $F_{min} = 16 U^{3/2}$
- $t_{min} = 11.1 U^{1/2}$

A partir des relations théoriques statistiques nous pouvons montrer que :

- $H_{1/3} = 0.021 U^2$
- $T_{1/3} = 0.59 U$
- T_{pic} ou $T_{max} = 0.64 U = 4.4 H_{1/3}^{1/2}$: Période pic du spectre
- $H_{max} = 1.86 H_{1/3}$

D'où on peut déduire le tableau suivant :

Méthode du spectre d'ondes

<i>m/s</i>	<i>U</i>		<i>F_{min}</i>		<i>t_{min}</i> <i>h</i>	<i>T_{1/3}</i> <i>s</i>	<i>T_{max}</i> <i>s</i>	<i>H_{1/3}</i> <i>m</i>	<i>H_{max}</i> <i>m</i>
	knots	<i>km/h</i>	<i>km</i>	NM					
10.3	20	37.0	526	284	35.6	6.1	6.6	2.3	4.2
12.9	25	46.1	733	396	39.8	7.6	8.3	3.5	6.5
15.5	30	55.6	974	526	43.5	9.2	9.9	5.1	9.4
18.0	35	64.6	1222	660	47.0	10.7	11.6	6.9	12.8
20.6	40	74.1	1492	806	50.2	12.2	13.2	9.0	16.8
23.2	45	83.1	1770	956	53.4	13.8	14.9	11.4	21.3
25.8	50	92.5	2092	1130	56.4	15.3	16.5	14.1	26.2
28.3	55	101.6	2390	1290	59.0	16.8	18.2	17.0	31.7

1 NM = 1852 m (Nautical Mile) longueur d'un arc de 1' de latitude.

1 knots = 1 NM / h (noeuds en français)

Echelle de Beaufort

Force	Appellation	Vitesse du Vent		Etat de la mer	Effet à terre
		Nœud	km/h		
0	calme	<1	<1	Mer d'huile, miroir	La fumée monte droit
1	très légère brise	1-2	1-5	Mer ridée	La fumée indique la direction du vent
2	légère brise	3-6	6-11	Vaguelettes	On sent le vent au visage
3	petite brise	7-10	12-19	Petits moutons	Les drapeaux flottent
4	jolie brise	11-15	20-28	Nombreux moutons	Le sable s'envole
5	bonne brise	16-20	29-38	Vagues, embruns	Les branches des pins s'agitent
6	vent frais	21-26	39-49	Lames, crêtes d'écume étendues	Les fils électriques sifflent
7	grand frais	27-33	50-61	Lames déferlantes	On peine à marcher contre le vent
8	coup de vent	34-40	62-74	Les crêtes des vagues partent en tourbillon d'écume	On ne marche plus contre le vent
9	fort coup de vent	41-47	75-88		
10	tempête	48-55	89-102	Les embruns obscurcissent la vue, on ne voit plus rien	Les enfants de moins de 12 ans volent
11	violente tempête	56-63	103-117		
12	ouragan	≥ 64	≥ 118		

Les modèles spectraux de propagation de Houle

Les modèles de prédiction des vagues sont basées sur la résolution discrète d'une équation de conservation pour le spectre de l'"action" des vagues $N = S/\omega$:

$$\boxed{\frac{DN}{Dt} = \frac{\Pi}{\omega}}$$

- Action des vagues : $A = E/\omega$
- Π représente
 - la génération des vagues par le vents
 - la propagation des vagues (refraction, shoaling, ...)
 - les interactions non-linéaires entre vagues
 - la friction sur le fond, déferlement bathymétrique, courant, ...

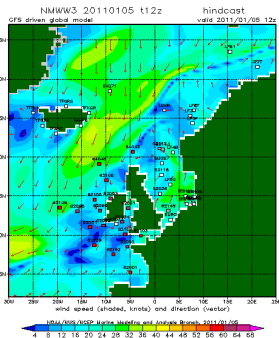
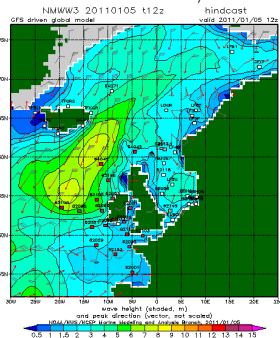
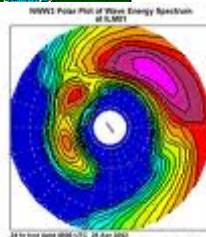
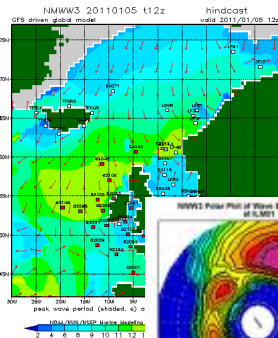
Trois types d'utilisations :

- Prédiction du climat de houle à partir des prévisions météorologiques
- Simulation d'événements passés exceptionnels
- Etudier le climat de houle sur un site particulier pour différentes conditions de forçage (Détermination de la houle de projet)

Les modèles spectraux de propagation de Houle

Trois modèles numériques open-source sont disponibles aujourd'hui :

- Wave Watch III (National Oceanic and Atmospheric Administration, USA)
- SWAN : Simulating WAVes Nearshore (TU Delft / Deltares, NL)
- TOMAWAC : TELEMAC-based Operational Model Addressing Wave Action Computation (EDF/ARTELIA/HR Wallingford/...)

 U_{10}

 $H_{1/3}$

 T_p


Sorties modèles de WW3 pour l'atlantique du Nord Est
le 6 janvier 2011 à 0H00 UTC

Hindcasting et bases de données

Hindcasting = Simulation d'événements passés exceptionnels

< 1995 Données SinopShips : mesure à l'oeil sur les bateaux (historiques)

> 1995 Observations satellites + bouées // simulations rétrospectives (hindcast) :

- PREVIMER : Observations et prévisions côtières
<http://www.previmer.org/previsions>
- ANEMOC : Atlas Numérique d'Etats de mer Océanique et Côtier (EDF/CETMEF) hindcast \approx 30 ans
<http://anemoc.cetmef.developpement-durable.gouv.fr/>
- OCEANWEATHER (international)

⇒ Développements de nombreuses BD (public / privée) : Analyse statistiques + valeurs extremes / H; Niveaux ; vent ; courants

→ Pétrolier, EMR ; Eoliennes ; Civil engineering ; (60 ans de données)

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie



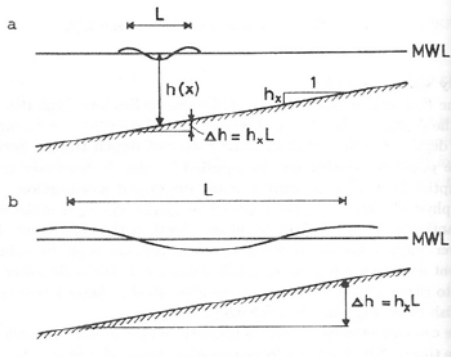
*Waves approaching a shoreline obliquely,
NW of Oceanside, CA.
(J. Shelton)*

Quand $\frac{h}{L} < \frac{1}{2}$ la houle commence à se déformer, les effets observés sont les suivants :

- Effets bathymétriques
 - Variation de la direction de propagation : Réfraction (Refraction)
 - Variation de la hauteur des vagues avec la profondeur : Levée de la houle (Shoaling)
 - Déferlement bathymétrique (Breaking)
- Effet du frottement sur le fond
 - Perte d'énergie par frottement

Propagation des vagues à l'approche des côtes : Fond graduellement varié

Pour que les résultats de la théorie linéaire de la houle soit applicable, il faut que le fond varie suffisamment lentement pour que la théorie linéaire s'applique "localement"



Condition de fond graduellement varié : $\frac{h}{L} \gg \frac{\partial h}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{L \partial h / \partial x}{h} \ll 1$

i.e. Profondeur relative grande devant la pente du fond

En pratique : $\frac{L \partial h / \partial x}{h} < 0.5$

Propagation des vagues à l'approche des côtes : Evolution de C et L

Lorsque $\frac{h}{L} < \frac{1}{2}$ la vitesse orbitale des vagues au voisinage du fond n'est pas négligeable et le frottement sur le fond engendre une déformation des vagues.

- La célérité des vagues est fortement affecté par la profondeur : $C \downarrow$ quand $h \downarrow$
- La période de la houle ne variant pas avec la profondeur :
 $\omega^2 = g k \tanh(k h) = cst$

$$\text{donc } \frac{k_2}{k_1} = \frac{\tanh(k_1 h_1)}{\tanh(k_2 h_2)} \Leftrightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{\tanh(2\pi h_1/L_1)}{\tanh(2\pi h_2/L_2)}$$

$$\text{Hypothèse d'eau profonde au point 1} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{\tanh(2\pi h_2/L_2)} \text{ et } L_1 = \frac{g T^2}{2\pi}$$

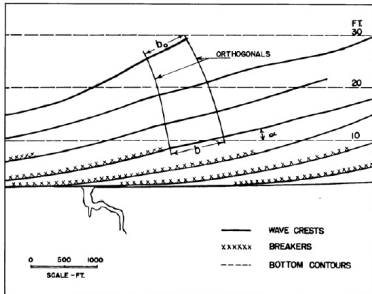
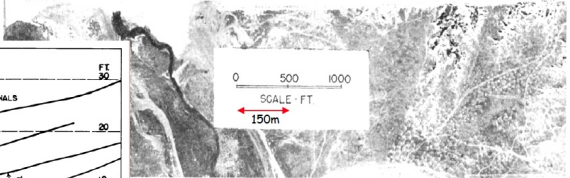
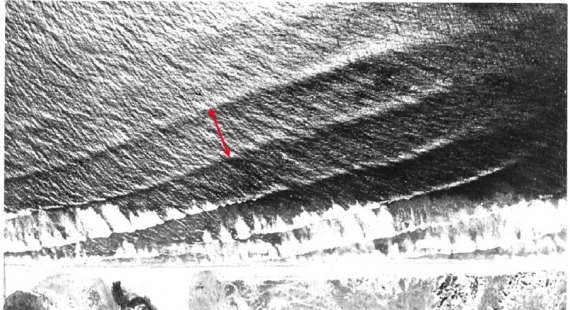
$$\text{Hypothèse d'eau peu profonde au point 2} \Rightarrow \tanh\left(\frac{2\pi h_2}{L_2}\right) \approx \frac{2\pi h_2}{L_2}$$

$$\text{D'où } \frac{L_1}{L_2} = \frac{L_2}{2\pi h_2} \Rightarrow \boxed{L_2 = \sqrt{2\pi L_1 h_2}}$$

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

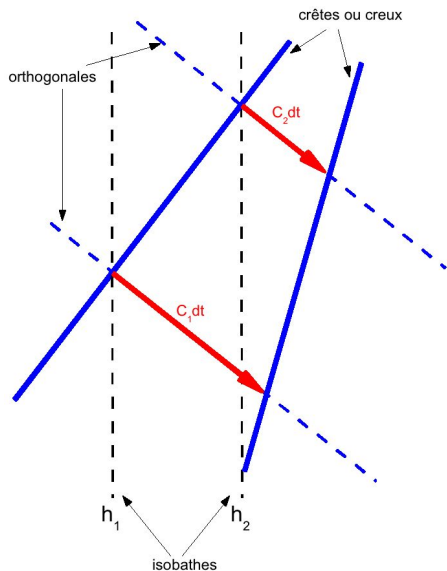
Propagation des vagues à l'approche des côtes : Réfraction (1/3)

Refraction



(Wiegell, 1964)

Propagation des vagues à l'approche des côtes : Réfraction (2/3)



On se place en eau peu profonde, donc :
 $C = \sqrt{g h}$,

et on suppose de plus que : $h_1 > h_2$

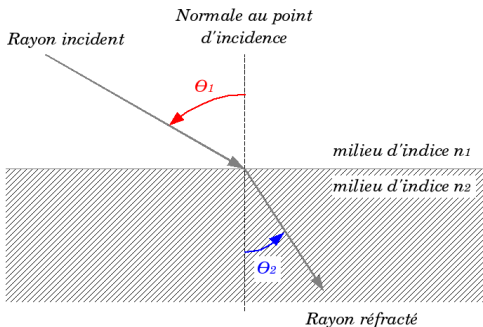
Donc $C_1 > C_2$

$\Leftrightarrow C_1 dt > C_2 dt$

Conclusion

Les lignes de crêtes ou de creux ont tendance à s'aligner avec les isobathes en eau peu profonde

Propagation des vagues à l'approche des côtes : Réfraction (3/3)

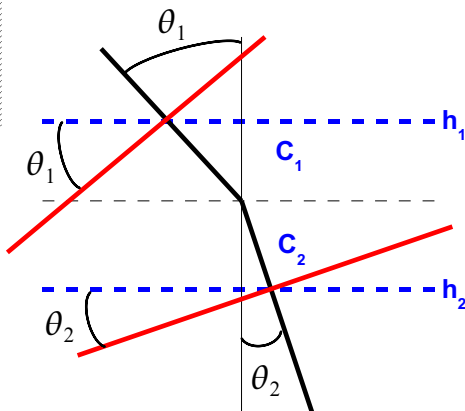


Par analogie avec la réfraction en optique, on utilise la **Loi de Snell-Descartes** pour la houle :

$$\frac{\sin(\theta_1)}{C_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{C_2}$$

Loi de Snell-Descartes pour la réfraction en optique :

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$



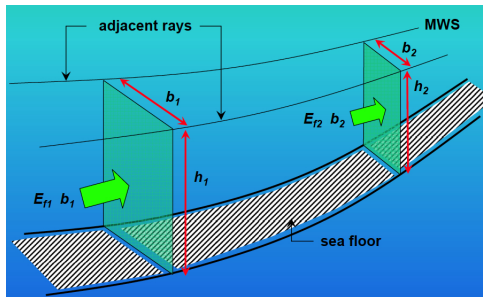
- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Propagation des vagues à l'approche des côtes : Levée de la Houle (Shoaling)

La conservation de l'énergie moyenne sur une longueur d'onde s'écrit :

$$\frac{\partial E_f}{\partial x} = -\epsilon$$

où ϵ = dissipation par frottement, déferlement, etc



En l'absence de frottement (hypothèse de fluide parfait) l'énergie se conserve entre deux lignes orthogonales (tube de courant) donc $E_{f1} b_1 = E_{f2} b_2$

Soit avec les notations du cours : $E_f = P = \frac{1}{2} \rho g a^2 C_g \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{C_{g1} b_1}{C_{g2} b_2}} = K_s K_r$

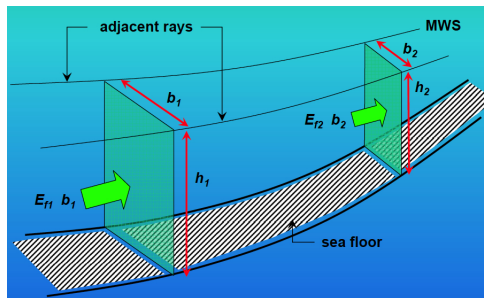
On introduit les coefficients de Shoaling : $K_s = \sqrt{\frac{C_{g1}}{C_{g2}}}$ et de refraction : $K_r = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}$

Propagation des vagues à l'approche des côtes : Levée de la Houle (Shoaling)

Regardons le cas de la transformation de la houle sans refraction :

$$b_1 = b_2 \Leftrightarrow K_r = 1$$

entre des conditions au large (eau profonde au point 1) et prêt de la côte (eau peu profonde au point 2).



Au point 1 : $C_{g1} = \frac{C_1}{2} \left(1 + \frac{2k_1 h_1}{\sinh(2k_1 h_1)} \right) \approx \frac{C_1}{2}$ car $\sinh(2k_1 h_1) \rightarrow \infty$

avec $C_1 = \frac{g T}{2\pi}$ on obtient $C_{g1} = \frac{g T}{4\pi}$

Au point 2 : $C_{g2} = \frac{C_2}{2} \left(1 + \frac{2k_2 h_2}{\sinh(2k_2 h_2)} \right) \approx C_2$ car $\sinh(2k_2 h_2) \approx 2k_2 h_2$

avec $C_2 = \sqrt{g h_2}$ on obtient $C_{g2} = \sqrt{g h_2}$

Propagation des vagues à l'approche des côtes : Levée de la Houle (Shoaling)

Le rapport d'amplitude entre 1 et 2 s'écrit donc : $\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{C_{g1}}{C_{g2}}} = \sqrt{\frac{g T}{4\pi\sqrt{g h_2}}}$

Avec $L_2 = C_2 T = \sqrt{g h_2} T$ on peut écrire : $T = \frac{L_2}{\sqrt{g h_2}}$, ainsi $\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{L_2}{4\pi h_2}}$

On a montré précédemment que : $L_2 = \sqrt{2\pi h_2 L_1}$ (en eau peu profonde)

D'où $\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi h_2 L_1}}{4\pi h_2}} \iff \frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{L_1}{8\pi h_2}\right)^{1/4}$: Loi de Green

Propagation des vagues à l'approche des côtes : Levée de la Houle (Shoaling)

Regardons le cas plus général où le point 1 est en eau profonde et le point 2 est à une profondeur quelconque. Le rapport d'amplitude entre 1 et 2 s'écrit alors :

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{C_{g1}}{C_{g2}}} = \sqrt{\frac{g T}{2\pi \sqrt{\frac{g}{k_2} \tanh(k_2 h_2)} \left(1 + \frac{2k_2 h_2}{\sinh(2k_2 h_2)}\right)}}$$

Loi de Green :

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{L_1}{8\pi h_2}\right)^{1/4}$$

Pour $T_1 = 10s$, $L_1 = 156m$ et $H_1 = 1.5m$

h_2 m	h_2/L_1	L_2 m	H_2 m	H_2 (Green) m
50	0.3	151	1.43	0.89
10	0.06	92	1.47	1.33
5	0.03	68	1.66	1.58
1.5	0.01	38	2.17	2.14

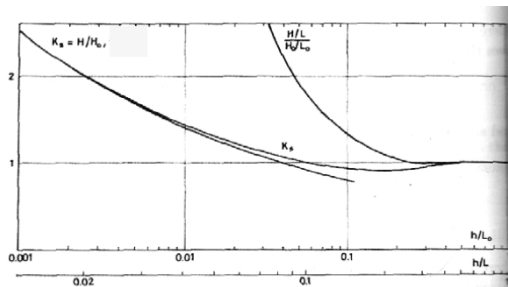


Fig. 3.5.6 The variation of H/H_0 , and H/L versus h/L_0 . The lowest curve represents Green's law (3.5.21) (SJ76).

Propagation des vagues à l'approche des côtes : Evolution de H (Shoaling)

Propagation d'une houle en **eau peu profonde** au-dessus d'un **fond de pente faible** :

$$h_2 < h_1 \Leftrightarrow \frac{h_1}{h_2} > 1 \Rightarrow K_s = \sqrt{\frac{C_{g1}}{C_{g2}}} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/4} > 1$$

$$\text{d'où } C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right) \approx C = \sqrt{gh} \Rightarrow$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \frac{b_1}{b_2}}$$

- Si $b_2 = b_1$ i.e. pas de refraction **alors** $K_r = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} = 1 \Rightarrow a_2 > a_1$
- Si $b_2 < b_1$ i.e. convergence des orthogonales **alors** $K_r = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} > 1 \Rightarrow a_2 > a_1$
- Si $b_2 > b_1$ i.e. divergence des orthogonales **alors** soit $\sqrt{h_2} b_2 > \sqrt{h_1} b_1 \Rightarrow a_2 < a_1$
soit $\sqrt{h_2} b_2 < \sqrt{h_1} b_1 \Rightarrow a_2 > a_1$

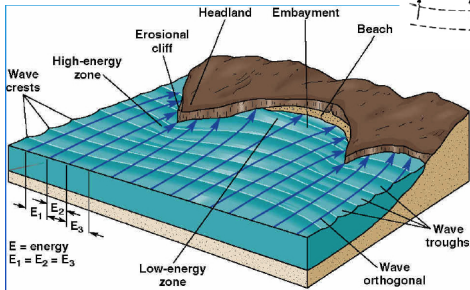
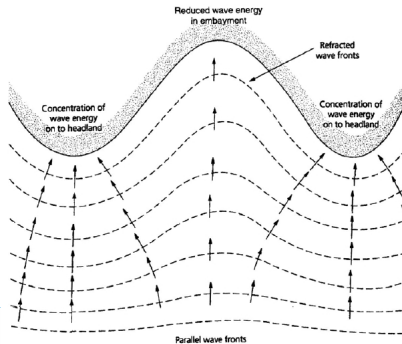
Propagation des vagues à l'approche des côtes : exemple de la baie

Caps

= convergence des lignes orthogonales

⇒ Concentration de l'énergie de la houle

⇔ vagues + hautes



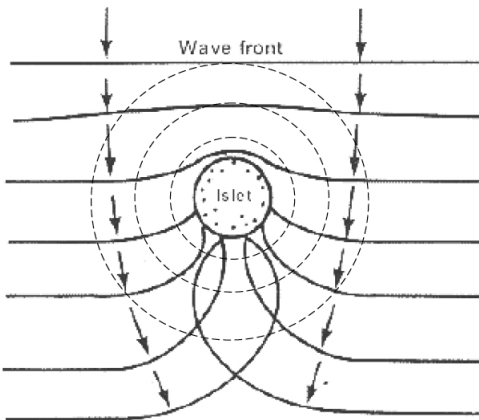
Baies

= divergence des lignes orthogonales

⇒ Réduction de l'énergie de la houle

⇔ vagues - hautes

Propagation des vagues à l'approche des côtes : exemple de l'île



Wave refraction around island
in Willapa Bay, WA. (D.A. Rahm)

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - **Le déferlement: "breaking"**
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Propagation des vagues à l'approche des côtes : le déferlement (breaking)

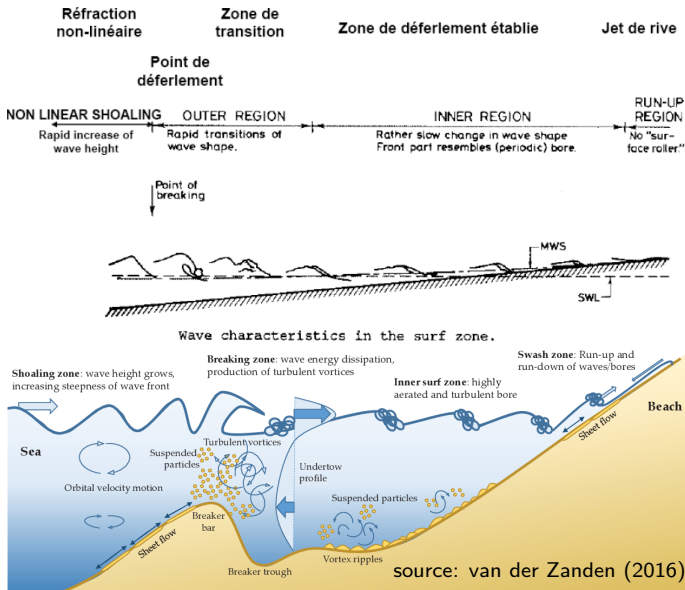


Figure 1.2. Conceptual drawing of cross-shore sediment processes in the near-shore region.

Propagation des vagues à l'approche des côtes : le déferlement (breaking)

Le **déferlement** est un phénomène au cours duquel l'**onde est partiellement ou totalement détruite** ; il est caractérisé par un haut niveau de turbulence et une grande dissipation d'énergie. Du point de vue hydrodynamique, le **phénomène se produit lorsque** :

- la **vitesse des particules** sur la crête de l'onde **dépasse la célérité** ;
- la condition de **pression "nulle" à la surface** ne peut **plus** être **satisfaite** ;
- l'**accélération des particules** à la crête est **plus grande que l'accélération de la pesanteur** ;
- la **surface libre** devient **verticale**.

Pour les houles progressives irrotationnelles, il existe **deux critères de déferlement** :

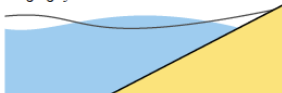
- **Cambrure** : $\epsilon_b = \frac{H}{L} \Big|_b = 0.142 \tanh \left(\frac{2\pi h_b}{L_b} \right)$ (Miche, 1944)

$$\Rightarrow \text{En eau profonde : } \frac{H}{L} \Big|_b = 0.142 \text{ (Michell, 1893)}$$

- **Hauteur relative** : $\frac{H}{h} \Big|_b = \frac{1}{\beta_b} = 0.78$ (McCowan, 1891)

$$\Rightarrow \beta_b : \text{indice de déferlement.}$$

Propagation des vagues à l'approche des côtes : le déferlement (breaking)

surging: $\xi > 5$ collapsing: $3.3 < \xi < 5$ plunging: $0.5 < \xi < 3.3$ spilling: $\xi < 0.5$ 

En réalité, l'indice de déferlement (β_b) dépend de la pente de la plage (m) et il existe plusieurs type de déferlement = $f(\epsilon_b, \beta_b)$

Paramètre d'Iribarren :

$$\xi = \frac{m}{\sqrt{H_0/L_0}}$$

avec L_0 la longueur d'onde des vagues en eau profonde

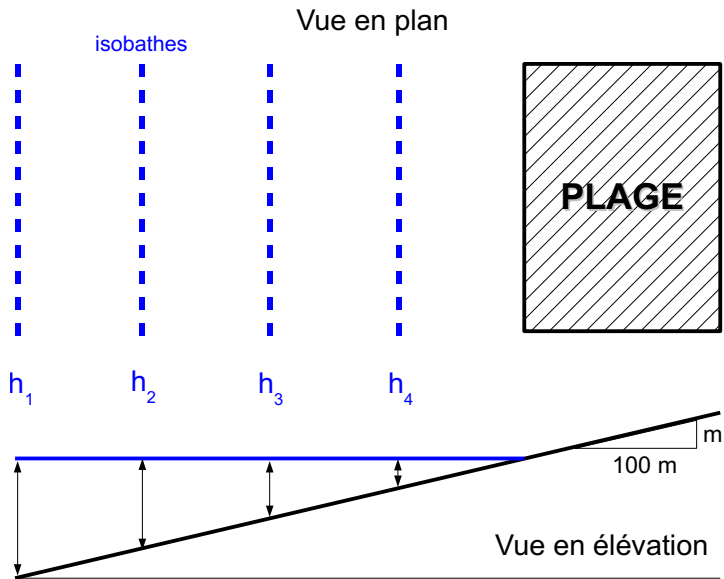
Propagation des vagues à l'approche des côtes : le déferlement (breaking)



© F. Grasso LEGI/CNRS (2009)

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - Élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Le cas de la plage cylindrique



Le cas de la plage cylindrique : Loi de Snell-Descartes

La plage cylindrique est caractérisée par des isobathes parallèles \Rightarrow $h = h(x)$

Dans ce cas la réfraction peut être traitée analytiquement à partir de la loi de Snell-Descartes :

$$\sin(\theta_2) = \frac{C_2}{C_1} \sin(\theta_1)$$

où θ_1 est l'incidence de la houle au large et θ_2 l'incidence de la houle plus près de la plage.

Si on fait l'hypothèse d'eau peu profonde en 2, alors :

$$\sin(\theta_2) = \frac{\sqrt{g h_2}}{\frac{g T}{2 \pi}} \sin(\theta_1)$$

$$\sin(\theta_2) = \frac{2 \pi}{T} \sqrt{\frac{h_2}{g}} \sin(\theta_1)$$

Le cas de la plage cylindrique : Coefficient de refraction K_r

Considérons deux rayons tradaté d'une distance l_0 .

La conservation de l'énergie impose :

$$a_1^2 C_{g1} b_1 = a_2^2 C_{g2} b_2$$

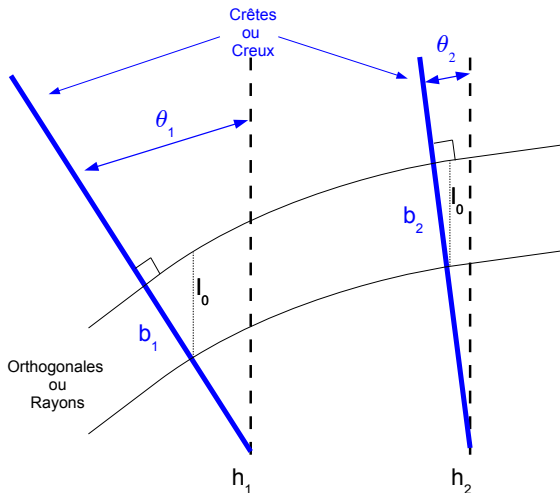
d'où : $K_r = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}$

On souhaite relier $\frac{b_1}{b_2}$ à θ_1 et θ_2 .

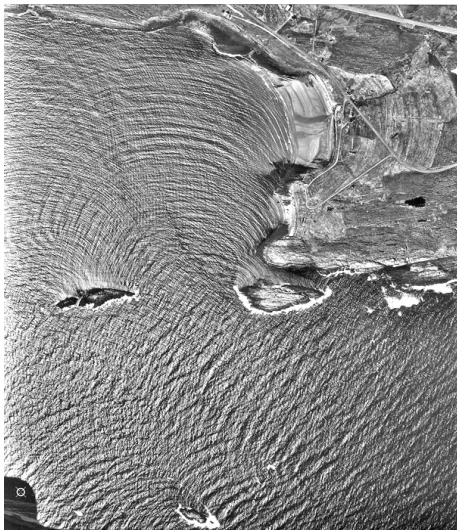
Géométriquement on a :

$$b_1 = l_0 \cos(\theta_1) \text{ et } b_2 = l_0 \cos(\theta_2)$$

$$\text{d'où } K_r = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} = \sqrt{\frac{\cos(\theta_1)}{\cos(\theta_2)}}$$



Autres phénomènes affectant la houle à l'approche des côtes



La diffraction



Sitges, Barcelone

sources : <http://geographyfieldwork.com>

Autres phénomènes affectant la houle à l'approche des côtes



Réflexion par les obstacles



Réfraction par les courants

Propagation à l'approche des côtes : Exercice d'application

On considère une plage cylindrique de pente 5%.

- ① Une houle monochromatique de période $T_1 = 8 \text{ s}$ et de hauteur $H_1 = 0.5 \text{ m}$ se propage frontalement vers cette plage ($\theta_1 = 0^\circ$)
 - a) Calculer les caractéristiques de la houle au large L_1 , k_1 et C_1 .
 - b) En faisant l'hypothèse d'eau peu profonde au point de déferlement déterminer le critère à l'origine du déferlement. Calculer la profondeur h_2 au point de déferlement.
 - c) Calculer les caractéristiques de la houle au point de déferlement : L_2 , k_2 , C_2 et H_2 .
 - d) Quel type de déferlement se produit ?
 - e) Même question pour $H_1 = 2 \text{ m}$ et $H_1 = 4 \text{ m}$.

- ② Une houle monochromatique de période $T_1 = 12 \text{ s}$ et de hauteur $H_1 = 1.5 \text{ m}$ se propage vers cette plage avec une incidence ($\theta_1 = 30^\circ$)
 - a) Calculer les caractéristiques de la houle au large L_1 , k_1 et C_1 .
 - b) Calculer les caractéristiques de la houle à une profondeur $h_2 = 5 \text{ m}$: L_2 , θ_2 et H_2
 - c) A quelle profondeur se produira le déferlement ?
 - d) Préciser les caractéristiques de la houle en ce point : L_b , H_b et θ_b ?

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - Élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Niveau de projet ou de dimensionnement

« Statistiques des niveaux marins extrêmes des côtes de France », 2012

Édité par le CETMEF et le SHOM (Cf. chapitre 1)

- **Observations en un point**

→ Loi de probabilité (loi de Gumbel) des surcotes de pleine mer pour les ports principaux.

- **Interpolation spatiale**

→ loi de probabilité pour les ports secondaires.

⇒ Attention méthode valide a proximité des points de mesures.

⇒ Dans les zones où il y a peu de données l'interpolation est sujette a de fortes incertitudes.

Houle de projet ou houle de dimensionnement

Le choix de H_{max} n'est pas toujours économiquement justifiable.

Etape 1 : Caractériser les conditions de houle

- Collecter les données de houle disponible
- Estimer les conditions de houle : prévision météo + modèle (empirique ou numérique)
- + prendre en compte l'atténuation, la réfraction, la diffraction, la réflexion, transmission.

Etape 2 :

Le choix de la houle de projet dépend des points suivants :

- La structure est elle sujette à l'attaque d'ondes non-déferlées, déferlantes ou déferlées ?
- Fréquence des besoins de maintenance dues à l'occurrence des tempêtes dommageables.

Quelques règles de dimensionnement

Choix de la houle de projet en fonction du type de structure :

- **Structures rigides** (ex : murs de palplanches)
 → $H_{1/100}$
- **Structures semi-rigides** (ex : structure cellulaire en palplanche remplies de matériaux)
 → $H_{1/10}$
- **Structures flexibles** (ex : brise-lames à talus en enrochements)
 → $H_{1/3}$

Effet du déferlement :

- On considère qu'une structure située à $h \leq 1,3 H$ sera soumise à des vagues déferlantes. Le point de déferlement dépend aussi de la pente et de la cambrure.
- Prédire le positionnement précis du déferlement est extrêmement difficile et on considère en général que la structure doit résister aux vagues déferlantes (cas le plus défavorable).

Forces exercées par les vagues sur les murs

Les forces exercées par les vagues dépendent essentiellement des conditions de houle au moment de l'impact :

- Vagues non-déferlées : pression hydrostatique
- Vagues déferlantes ou déferlées : pression dynamique additionnelle
⇒ forces plus importantes

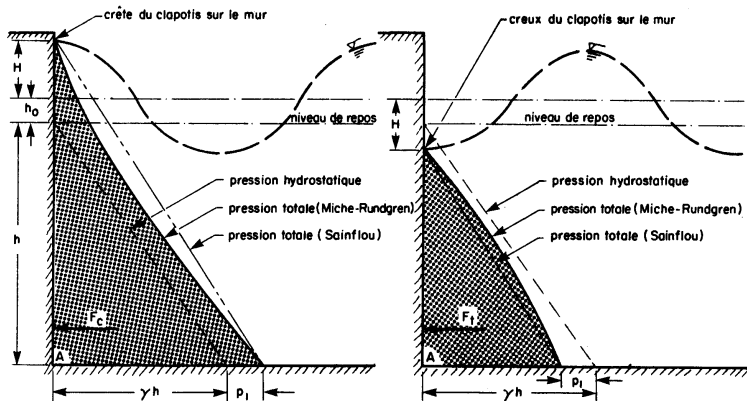


Forces exercées par les ondes non-déferlées sur une paroi verticale

Lorsqu'une vague impacte un mur vertical, il y a formation d'un clapotis, la **hauteur de la vague est doublée** et le **niveau moyen est surélevé par rapport au niveau au repos** (h_0) (Théorie de Sainflou) :

$$h_0 = \frac{\pi H^2}{L} \operatorname{cotanh} \left(\frac{2 \pi h}{L} \right)$$

$$P_1 = \rho g H / \cosh \left(\frac{2 \pi h}{L} \right)$$



$$F_C = 1/2(\rho g h + P_1) (h + h_0 + H)$$

$$M_C = 1/6(\rho g h + P_1) (h + h_0 + H)^2/6$$

$$F_t = 1/2(\rho g h - P_1) (h + h_0 - H)$$

$$M_t = 1/6(\rho g h - P_1) (h + h_0 - H)^2$$

- 1 Introduction
- 2 Les niveaux marins
 - La marée
 - Les surcôtes
 - élévation du niveau moyen
- 3 Le modèle de Stokes
 - Hypothèses
 - Dérivation du modèle
 - Propriétés cinématiques et énergétiques
- 4 Description des états de mer
 - Description probabiliste des états de mer réels
 - Génération des ondes par le vent
- 5 Propagation des vagues à l'approche des côtes
 - La réfraction
 - Levée de la houle: "shoaling"
 - Le déferlement: "breaking"
 - Application au cas de la plage cylindrique
- 6 Conclusion : choix pour le dimensionnement
- 7 Bibliographie

Bibliographie

- 1 Shore Protection Manual, Volume 1, US Army Corps Of Engineers (1984)
- 2 Goda, Y., Random seas and Design of Maritime Structures, University of Tokyo Press (1985)
- 3 Ouellet, Y., Hydraulique Maritime, Notes de cours, Université de Laval, Canada (1975)
- 4 Ardhuin, F., Vagues : hydrodynamique et télédétection, Notes de cours, ENSIETA, Université de Brest (2006)
- 5 Barthélémy, E., Hydraulique Maritime, Notes de cours, ENSE3, INP Grenoble (2010)
- 6 Minimum Design Loads for Buildings And Other Structures: ASCE/SEI 7-05
- 7 Coastal Engineering Manual (libre : <http://chl.erdc.usace.army.mil/chl.aspx?p=s&a=ARTICLES;101>)
- 8 Rapports climat de la France au XXIe siècle. Volume 3 : Evolution du niveau de la mer - février 2012 (libre : <http://www.developpement-durable.gouv.fr/Volume-3-Evolution-du-niveau-de-la.html>)