

# Mécanique du solide, UE MEC24a

Jean-Philippe Matas

février 2013



# Introduction

## A Motivation

- Le but de la mécanique est d'étudier le lien entre forces et mouvement. On va voir que comme en mécanique du point le lien s'effectue plus précisément entre la force et l'*accélération*.
- Les deux grandes idées du cours : le principe fondamental de la dynamique, et la conservation de l'énergie. En mécanique du point on ne voit qu'une partie du PFD : ici il faudra rajouter le théorème du moment cinétique qui décrit la *rotation*.

## B Outils mathématiques

- Les outils mathématiques nécessaires : tenseurs, algèbre vectorielle (matrices et vecteurs), équations différentielles (ordre 2).
- En mécanique du point on peut se débrouiller avec des vecteurs liés : la force (ou la vitesse, l'accélération, etc.) sur un point M est modélisée par un vecteur passant par ce point M.
- En mécanique du solide on cherche à caractériser la force sur un objet (S) qui a une étendue spatiale finie : il faut donner  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{a}$  ou  $\mathbf{F}$  sur une infinité de points. Ces vecteurs sont des fonctions continues de l'espace  $\mathbf{V}(x,y,z)$ ,  $\mathbf{a}(x,y,z)$  ou  $\mathbf{F}(x,y,z)$  : ce sont des *champs vectoriels*. De façon analogue, si on donne la température, la pression ou la masse volumique : champs scalaires.
- Il existe un champ vectoriel qui s'avère indispensable en mécanique des milieux continus, alors qu'il ne jouait aucun rôle en mécanique du point. Pour un objet d'extension finie il peut exister un mouvement de rotation, et la force seule ne suffit pas à décrire cette rotation : pour caractériser la rotation, on va utiliser le moment  $\mathcal{M}$  associé à une force : Pour une force  $\mathbf{f}$  s'exerçant en M :

$$\mathcal{M}(A) = \mathbf{AM} \wedge \mathbf{f}$$

Le moment est nécessaire pour décrire la rotation : exemple du tourniquet avec même  $\mathbf{F}$  mais deux  $\mathcal{M}$  différents.

- Pour un solide indéformable, il existe un outil mathématique permettant de caractériser le champ de vitesse de façon concise : les tenseurs. La donnée de quelques éléments ciblés permet d'accéder à l'*ensemble* du champ de vitesse.



# Chapitre 1

## Cinématique

### A Champ de vitesse d'un solide indéformable

#### A.1 Torseur cinématique

**Définition :** un solide indéformable est un ensemble de points pour lequel les distances relatives sont indépendantes du temps.

On se place dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . Pour deux couples de points  $(A,B)$  et  $(A_1,B_1)$  d'un solide indéformable, on aura donc au cours du temps :

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{A_1B_1} = \text{constante}$$

Avec le cas particulier  $A = A_1$  et  $B = B_1$ ,  $\mathbf{AB}^2 = \text{constante}$ . On peut dériver cette relation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} (\mathbf{AB} \cdot \mathbf{A_1B_1}) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \mathbf{AB} \Big|_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{A_1B_1} &= -\mathbf{AB} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{A_1B_1} \Big|_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Cette relation établit que l'application  $\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$  appliquée aux points d'un solide indéformable est une application antisymétrique.

Or on peut montrer que si une application est antisymétrique, elle peut toujours être ramenée à un produit vectoriel :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \text{ antisymétrique} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{\Omega} / \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge$$

**Démonstration** L'application  $\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$  est linéaire :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \mathbf{A} + \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \mathbf{B}$$

On peut donc lui associer une matrice dans un repère lié à  $\mathcal{R}$  :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

où les coefficients  $a_{ij}$  dépendent a priori du temps. On va montrer que plusieurs de ces coefficients sont nécessairement nuls. Par définition :

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 1 \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \hat{\mathbf{x}} = 0$$

Or  $\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \hat{\mathbf{x}} = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$  d'où on tire  $a_{11} = 0$ . En faisant le même raisonnement sur  $\hat{\mathbf{y}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  on trouve  $a_{22} = 0$  et  $a_{33} = 0$ . De plus :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0 &\Rightarrow \hat{\mathbf{x}} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} (\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0 \\ &\Leftrightarrow a_{12} + a_{21} = 0 \end{aligned}$$

On trouve de même  $a_{13} + a_{31} = 0$  et  $a_{23} + a_{32} = 0$ . On n'a donc finalement que 3 coefficients indépendants, et la matrice de  $\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice antisymétrique. Et comme toutes les matrices antisymétriques, elle vérifie la propriété :

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & a_{31} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{23} \\ a_{31} \\ a_{12} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Ce qui revient à dire que  $\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \mathbf{X} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}$  avec

$$\boldsymbol{\Omega} = (a_{23}, a_{31}, a_{12})$$

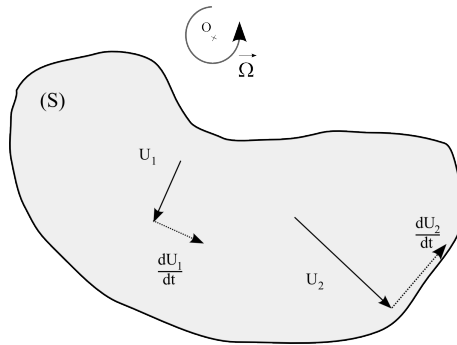


FIGURE 1.1 – Soit (S) indéformable en rotation autour de O. Pour deux vecteurs  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  appartenant au solide, on peut vérifier graphiquement que l'on a bien  $\mathbf{U}_1 \cdot \frac{d\mathbf{U}_2}{dt} = -\mathbf{U}_2 \cdot \frac{d\mathbf{U}_1}{dt}$

On en déduit donc qu'il existe  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}}$  tel que  $\forall (P, Q) \in S$ ,

$$\boxed{\left. \frac{d}{dt} \mathbf{PQ} \right|_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}} \wedge \mathbf{PQ}} \quad (1.1)$$

Prendre un exemple avec une rotation autour d'un point pour montrer visuellement. Le vecteur  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}}$  dépend du référentiel  $\mathcal{R}$  dans lequel on dérive : on l'appelle le vecteur instantané de rotation de  $S$  dans  $\mathcal{R}$ . Si on introduit l'origine  $O$  fixe d'un repère associé à  $\mathcal{R}$ , on peut écrire

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{PQ} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d}{dt} (\mathbf{PO} + \mathbf{OQ}) \right|_{\mathcal{R}} = -\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(P) + \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(Q)$$

d'où

$$\boxed{\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(Q) = \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(P) + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}} \wedge \mathbf{PQ}} \quad (1.2)$$

On se rend donc compte que le champ de vitesse vérifie la relation de définition des torseurs ! On appelle ce torseur le *torseur des vitesses*, ou *torseur cinématique*. On le note  $[\mathbf{v}_{\mathcal{R}}]$ .

Ses éléments de réduction sont sa résultante  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}}$ , et la donnée du champ de vitesse en un point  $P$  appartenant au solide. D'où  $[\mathbf{v}_{\mathcal{R}}] = \{\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}}, \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(P)\}$ .

Pouvons-nous en dire autant pour le champ des accélérations ? On dérive (1.2) :

$$\mathbf{a}(Q)_{\mathcal{R}} = \mathbf{a}(P)_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \mathbf{PQ} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}} \wedge \left. \frac{d}{dt} \mathbf{PQ} \right|_{\mathcal{R}}$$

Le dernier terme est différent de zéro (sauf cas particulier), donc on voit que le champ des accélérations n'est pas un torseur, il n'est pas antisymétrique.

Si on multiplie la relation (1.2) par  $\mathbf{PQ}$  on obtient :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(Q) \cdot \mathbf{PQ} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(P) \cdot \mathbf{PQ}$$

On parle d'équiprojectivité du champ de vitesse (faire un dessin). Mais la relation (1.2), qui est vectorielle, est plus générale.

## A.2 Vecteur rotation

Comment interpréter le vecteur  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}}$  ? Considérons quelques cas particuliers :

1. **Translation** : attention, translation pas nécessairement rectiligne. Exemple de la terre, dont l'axe est en translation elliptique autour du soleil. On dit qu'un solide est en translation dans le référentiel  $\mathcal{R}$  si  $\forall (P, Q) \in S, \forall t, \mathbf{PQ}(t) = \mathbf{PQ}(t_0)$ . On a donc  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(P) = \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(Q) \forall t$  et  $\forall (P, Q)$ , d'où  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}} = 0$ . La condition suffisante est immédiate, c'est donc équivalent.
2. **Rotation** : un solide est en rotation par rapport à un axe ( $\Delta$ ) si et seulement si  $\exists$  deux points de ( $S$ ) qui sont fixes sur ( $\Delta$ ). On se place dans la base cylindrique d'axe  $\mathbf{u}_z$  selon ( $\Delta$ ), et on va déterminer  $\boldsymbol{\Omega}$  dans cette base en utilisant la relation (1.1).

On a  $\frac{d}{dt}\mathbf{u}_z = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}_z = 0$  d'où  $\boldsymbol{\Omega}$  dirigé selon l'axe de rotation. On pose  $\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{u}_z$ .

Que vaut  $\omega$ ?  $\frac{d}{dt}\mathbf{u}_r = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}_r = \omega \mathbf{u}_\theta$  Or on sait que  $\frac{d}{dt}\mathbf{u}_r = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$ . On a donc  $\omega = \dot{\theta}$ , et  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta} \mathbf{u}_z$

Il faut faire attention au sens de rotation pour le signe de  $\boldsymbol{\Omega}$ . Le cas le plus général correspond à une translation + une rotation instantanée, où l'axe de rotation et la vitesse de rotation dépendent de  $t$ . Mais nous nous limiterons essentiellement à des cas où la rotation est constante.

## B Cinématique du contact de deux solides

On considère deux solides  $(S_0)$  et  $(S_1)$  en contact, et en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ils se déplacent dans un référentiel de référence  $\mathcal{R}$ . On définit les référentiels  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  liés respectivement à  $(S_0)$  et  $(S_1)$ . On suppose que le contact est ponctuel, en  $I$ . Mais attention, le point de contact va changer au cours du mouvement. On peut repérer l'ensemble des points de contact  $I_0$  sur  $(S_0)$  et des points  $I_1$  sur  $(S_1)$  : deux courbes différentes. Et en plus pour l'observateur qui reste dans  $\mathcal{R}$  il existe une troisième courbe, celle du point de contact géométrique  $I$ !

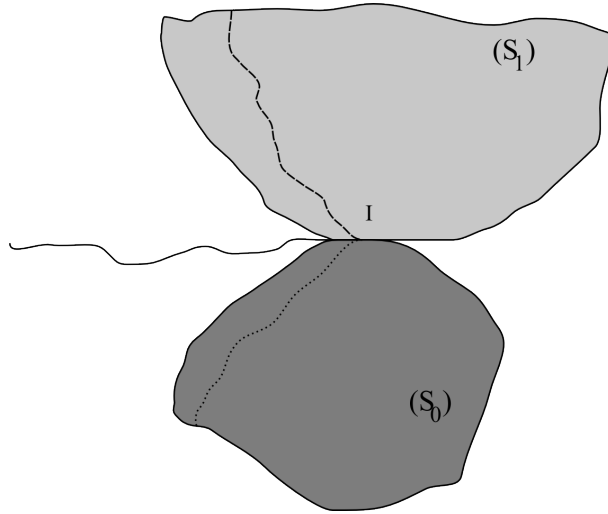


FIGURE 1.2 – Deux solides en contact ponctuel en  $I$  : en trait continu l'ensemble des points de contact géométriques, en pointillés les points de contact appartenant à  $S_0$  et en tirets ceux appartenant à  $S_1$ . A l'instant  $t$  ces 3 points sont confondus en  $I$ .



La vitesse de ces points dans  $\mathcal{R}$  est a priori différente :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(I) = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{OI} \right|_{\mathcal{R}} \neq \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(I_0) \neq \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(I_1)$$

Ces points sont confondus à un instant  $t$  donné, mais ensuite ils se séparent.

Vitesse de glissement de  $(S_1)$  sur  $(S_0)$  : c'est la différence entre la vitesse de leurs points de contact.

$$\boxed{\mathbf{v}_{\mathbf{g}}|_{S_1/S_0} = \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(I_1 \in S_1) - \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(I_0 \in S_0)} \quad (1.3)$$

On dit qu'un solide  $(S_1)$  roule sans glisser sur  $(S_0)$  si et seulement si  $\mathbf{v}_{\mathbf{g}}|_{S_1/S_0} = 0$ .

Exemple d'une roue de voiture sur une route : la route  $(S_0)$  est fixe, elle est liée au référentiel de référence  $(\mathcal{R})$  et  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(I_0 \in S_0) = 0$ . Le point  $I_1$  décrit une cycloïde.

## C Changement de référentiel

On considère un solide  $(S)$  qui se déplace dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . On introduit un référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au solide. On peut définir des vitesses et des accélérations dans ce nouveau référentiel : comment relier les grandeurs de  $\mathcal{R}$  à celles de  $\mathcal{R}'$  ?

### C.1 Dérivation d'un vecteur

On introduit un repère  $(O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$  lié au référentiel  $\mathcal{R}$ . On considère un vecteur  $\mathbf{X}$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  :  $\mathbf{X} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ . Ce vecteur est quelconque, ni lié à  $\mathcal{R}$  ni à  $\mathcal{R}'$ .

On aura alors

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{X} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{dx_1}{dt} \mathbf{e}_1 + x_1 \left. \frac{d}{dt} \mathbf{e}_1 \right|_{\mathcal{R}} + \frac{dx_2}{dt} \mathbf{e}_2 + x_2 \left. \frac{d}{dt} \mathbf{e}_2 \right|_{\mathcal{R}} + \frac{dx_3}{dt} \mathbf{e}_3 + x_3 \left. \frac{d}{dt} \mathbf{e}_3 \right|_{\mathcal{R}}$$

Les vecteurs de base  $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$  étant liés à  $\mathcal{R}$ , on a  $\left. \frac{d}{dt} \mathbf{e}_1 \right|_{\mathcal{R}} = 0$  et de même pour  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$ .

D'où

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{X} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{x}_3 \mathbf{e}_3 = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i$$

en notant la dérivée par un point. Attention, ce ne serait pas vrai pour une base polaire par exemple, où les vecteurs de base dépendent de la position.

On considère à présent un solide  $(S)$  qui se déplace dans  $\mathcal{R}$ . On lui associe un référentiel  $\mathcal{R}'$ , lié au solide. Soit  $(O' \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3)$  un repère lié à  $\mathcal{R}'$  et donc à  $(S)$ . On peut exprimer le vecteur  $\mathbf{X}$  dans cette base :

$$\mathbf{X} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3 = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

On peut ainsi dériver  $\mathbf{X}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  : vu que par définition ( $\mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}'_3$ ) sont liés à  $\mathcal{R}'$ , on a

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{X} \right|_{\mathcal{R}'} = \dot{x}'_1 \mathbf{e}'_1 + \dot{x}'_2 \mathbf{e}'_2 + \dot{x}'_3 \mathbf{e}'_3 = \sum_i \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i$$

Mais on voudrait maintenant relier la dérivée dans  $\mathcal{R}$  à la dérivée dans  $\mathcal{R}'$  :

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{X} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_i \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i + \sum_i x'_i \left. \frac{d}{dt} \mathbf{e}'_i \right|_{\mathcal{R}}$$

Le premier terme correspond à  $\left. \frac{d}{dt} \mathbf{X} \right|_{\mathcal{R}'}$ . Mais on voit qu'il y a un terme supplémentaire. Ce terme supplémentaire correspond à la dérivée dans  $\mathcal{R}$  des vecteurs de base de  $\mathcal{R}'$ . Or nous avons vu que  $\forall (P, Q) \in S$ ,

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{PQ} \right|_{\mathcal{R}'} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{PQ}$$

où  $\boldsymbol{\Omega}$  est le vecteur rotation associé au mouvement du solide  $S$  dans  $\mathcal{R}$ . On le note par la suite  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ . En remplaçant  $\mathbf{PQ}$  par  $\mathbf{e}'_i$  on a donc :

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{e}'_i \right|_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{e}'_i$$

d'où

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{X} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{X} \right|_{\mathcal{R}'} + \sum_i x'_i \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{e}'_i = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{X} \right|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \sum_i x'_i \mathbf{e}'_i$$

soit finalement

$$\boxed{\left. \frac{d}{dt} \mathbf{X} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{X} \right|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{X}} \quad (1.4)$$

Ceci est vrai  $\forall \mathbf{X}$ . C'est la formule de Bour. Elle permet de relier la dérivée dans un référentiel à la dérivée dans un autre référentiel. Si  $\mathbf{X}$  appartient à  $\mathcal{R}'$  on retrouve la formule 1.1.

## C.2 Vitesses

On reprend les mêmes référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . On veut relier la vitesse d'un point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à la vitesse dans  $\mathcal{R}'$ . En introduisant l'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$ , on peut écrire

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left. \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\mathbf{O}'M}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

En utilisant la formule de Bour sur le deuxième terme :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(M) = \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(O') + \left. \frac{d\mathbf{O}'M}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{O}'M$$

Soit finalement

$$\boxed{\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(M) = \mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(O') + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}} \quad (1.5)$$

C'est la loi de composition des vitesses.  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(M)$  est la vitesse relative. Les deux autres termes correspondent à la vitesse d'entraînement :  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(O') + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}$

On peut considérer la vitesse d'entraînement comme la vitesse d'un point fictif, le point coïncidant. On voit que la vitesse du point coïncidant s'exprime comme un torseur : le point coïncidant peut être considéré comme le point appartenant à  $\mathcal{R}'$  qui coïncide avec M à l'instant t.

**Exemple** : Un insecte M se déplace à vitesse constante  $v_0$  le long du rayon d'un manège qui tourne à une vitesse  $\omega$ . Il quitte le centre à  $t = 0$ . Soit  $\mathcal{R}'$  associé au manège, et  $\mathcal{R}$  fixe référentiel du laboratoire. que vaut  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(M)$ ? Dessin avec les bases (fixe et tournante). Le vecteur rotation vaut  $\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{z}$ .  $O'$  est confondu avec O, d'où :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(M) = v_0 \mathbf{x}' + \omega \mathbf{z} \wedge \mathbf{O}\mathbf{M}$$

On a  $\mathbf{O}\mathbf{M} = v_0 t \mathbf{x}'$  d'où  $\omega \mathbf{z} \wedge \mathbf{O}\mathbf{M} = \omega v_0 t \mathbf{y}'$  et donc :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(M) = v_0 \mathbf{x}' + \omega v_0 t \mathbf{y}'$$

Le deuxième terme correspond à la vitesse du point coïncidant. On peut tout à fait exprimer le résultat dans la base de  $\mathcal{R}'$ , bien distinguer repère et référentiel.

### C.3 Accélération

On veut à présent relier l'accélération dans  $\mathcal{R}$  à l'accélération dans  $\mathcal{R}'$ .

$$\mathbf{a}_{\mathcal{R}}(M) = \left. \frac{d\mathbf{v}_{\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \left. \frac{d\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(O')}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}_e}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M} + \boldsymbol{\Omega}_e \wedge \left. \frac{d\mathbf{O}'\mathbf{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

il faut calculer chacun de ces termes :

$$- \left. \frac{d\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(O')}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathbf{a}_{\mathcal{R}}(O')$$

$$- \left. \frac{d\mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \mathbf{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(M) \text{ avec}$$

la formule de Bour.

$$- \boldsymbol{\Omega}_e \wedge \left. \frac{d\mathbf{O}'\mathbf{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\Omega}_e \wedge \left( \left. \frac{d\mathbf{O}'\mathbf{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M} \right) = \boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \boldsymbol{\Omega}_e \wedge (\boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M})$$

D'où en regroupant tout :

$$\boxed{\mathbf{a}_{\mathcal{R}}(M) = \mathbf{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \mathbf{a}_{\mathcal{R}}(O') + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}_e}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M} + \boldsymbol{\Omega}_e \wedge (\boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{M}) + 2\boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(M)} \quad (1.6)$$

C'est la somme de l'accélération relative  $\mathbf{a}_{\mathcal{R}'}$ , de l'accélération d'entraînement  $\mathbf{a}_e$ , et de l'accélération de Coriolis  $\mathbf{a}_c$ .

Si  $M$  est fixe dans  $\mathcal{R}'$ , on ne retrouve que  $\mathbf{a}_e$  : c'est l'accélération du point coïncidant. L'accélération de Coriolis n'existe que s'il existe un mouvement relatif,  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(M) \neq 0$ .

**Exemple** : calcul en coordonnées polaires dans une base tournante (2D). Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est associé à la base tournante.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(A) &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} \\ \mathbf{v}_{\mathcal{R}'}(A) &= \dot{\rho}\hat{\rho} \\ \mathbf{a}_{\mathcal{R}}(A) &= \ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\hat{\theta} + \rho\ddot{\theta}\hat{\theta} - \rho\dot{\theta}^2\hat{\rho}\end{aligned}$$

Le premier terme : accélération relative. Le second : Coriolis. Les deux derniers : accélération d'entraînement (resp. dérivée de  $\Omega$  et double produit vectoriel).

#### C.4 Rotations

Soient deux points  $A$  et  $B$  de  $(S)$  indéformable, et deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

$$\left. \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{AB}$$

$$\left. \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}'} \wedge \mathbf{AB}$$

Et la formule de Bour nous dit que :

$$\left. \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\mathbf{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{AB}$$

On en déduit donc, puisque c'est vrai  $\forall (A,B)$  :

$$\boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}} = \boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \quad (1.7)$$

**Remarque 1** : Cette additivité correspond à l'additivité des résultantes du torseur cinématique.

**Remarque 2** : Comme cas particulier on a  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = -\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$ .

## Chapitre 2

# Cinétique

A présent on introduit la masse : c'est le coefficient qui intervient dans la relation force - accélération. Plus précisément, pour un objet d'extension spatiale finie on va devoir tenir compte de sa distribution spatiale.

Remarque : A priori distinction entre masse pesante et masse inerte. Expérimentalement on n'a jamais réussi à mesurer la différence : masse inerte = masse pesante. Mais pourquoi donc ? C'est Einstein avec la relativité qui apportera l'explication :

$$m_i = m_p / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

avec  $c$  vitesse de la lumière et  $v$  vitesse de l'objet. L'inertie augmente quand on se rapproche de  $c$ , et empêche d'atteindre la vitesse de la lumière. Pour  $v/c \ll 1$  les deux coefficients sont égaux.

### A Centre de gravité

Définition La masse totale du solide  $S$  est définie comme :

$$M = \iiint_{A \in S} \rho(A) dV$$

où  $\rho(M)$  est un champ scalaire qui correspond à la distribution volumique de masse. De même, on peut définir une densité surfacique de masse  $\sigma$  :

$$M = \iint_{A \in S} \sigma(A) dS$$

ou encore une densité linéique à 1D. Le centre de gravité  $G$  correspond au barycentre de cette distribution :

$$\boxed{\mathbf{OG} = (1/M) \iiint_{A \in S} \rho(A) \mathbf{OA} dV} \quad (2.1)$$

ou de façon équivalente :

$$\iiint_{A \in S} \rho(A) \mathbf{GA} dV = 0$$

On l'appelle centre de gravité ou également centre d'inertie (cf distinction entre les masses).

**Exemple de calcul** : on prend un demi-disque 2D de densité surfacique  $\sigma =$  constante : où est G ?

$$x_G = (1/M) \iint_S \rho(M) (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{OM}) dS = (1/M) \iint_S \sigma x dS$$

On passe en polaires pour pouvoir exprimer les bornes de l'intégrale de façon simple. Avec  $dS = dr \cdot r d\theta$  en polaires, et  $x = r \cos \theta$  on obtient :

$$x_G = (1/M) \int_0^R \int_0^\pi \sigma r \cos \theta r d\theta dr = 0$$

par symétrie.

De même :

$$y_G = (1/M) \int_0^R \int_0^\pi \sigma r \sin \theta r d\theta dr = (2\sigma/M) \int_0^R r^2 dr = 2\sigma R^3/3M$$

. Or  $M = \sigma \pi R^2/2$  d'où  $y_G = 4R/3\pi$ .

**Remarque** : Additivité du barycentre, en particulier dans le cas des masses négatives : prendre l'exemple du croissant = grand cercle - petit cercle.

#### Référentiel du centre de masse

C'est un référentiel très pratique qu'on utilise souvent : il a pour origine le centre de masse G, et des axes *parallèles* à ceux du référentiel galiléen de référence  $\mathcal{R}$ . Il est donc en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ , mais attention pas en translation uniforme. On montrera que si le solide est isolé, le RCM est un référentiel galiléen, mais sinon ce n'est pas vrai.

On notera les quantités exprimées dans le référentiel du centre de masse avec une \*. Par exemple pour la vitesse :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}}(M) = \mathbf{v}_{\mathcal{R}}(G) + \mathbf{v}^*(M)$$

Avec cette définition, la formule de Bour implique donc que :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{R}^*}$$

## B Torseurs cinétique et dynamique

### B.1 Définition

La quantité de mouvement d'un point :  $m\mathbf{v}$ . On généralise pour un solide :

$$\mathbf{P} = \iiint_{M \in S} \mathbf{v}(M) dm = \iiint_{M \in S} \rho(M) \mathbf{v}(M) dV$$

. Par analogie avec le torseur de forces (résultante = force, moment = moment de la force), on peut construire un torseur à partir d'une densité vectorielle quelconque  $\mathbf{w}$  : la résultante puis le moment. On définit le torseur cinétique de cette façon-là à partir de la quantité de mouvement volumique  $\rho \mathbf{v}$  :

- Résultante :  $\mathbf{P} = \iiint_{M \in S} \mathbf{v}(M) dm$ . C'est la quantité de mouvement du solide.
- Moment en A :  $\mathbf{L}(A) = \iiint_{M \in S} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{v}(M) dm$ . C'est le *moment cinétique* (parfois noté  $\boldsymbol{\sigma}$ ).

Par construction on a donc  $\mathbf{L}(O) = \mathbf{L}(A) + \mathbf{OA} \wedge \mathbf{P}$ .

De la même façon, on peut construire un torseur à partir de l'accélération, au lieu de la vitesse, ce sera le torseur dynamique :

- Résultante :  $\mathbf{D} = \iiint_{M \in S} \mathbf{a}(M) dm$ . C'est la quantité d'accélération.
- Moment en A :  $\boldsymbol{\delta}(A) = \iiint_{M \in S} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{a}(M) dm$ . C'est le *moment dynamique*.

On verra que ces torseurs ont des propriétés fabuleuses. Mais le problème est que pour l'instant ils sont définis comme des intégrales triples. Heureusement il existe des moyens plus simples de calculer résultante et moment pour chacun des deux.

### B.2 Propriété des résultantes

On a vu que le centre de masse est défini comme :

$$\mathbf{OG} = (1/M) \iiint_{M \in S} \mathbf{OM} dm$$

Si on prend O point fixe dans  $\mathcal{R}$  et qu'on dérive :

$$\frac{d\mathbf{OG}}{dt} = (1/M) \iiint_{M \in S} \frac{d\mathbf{OM}}{dt} dm$$

$$\boxed{\mathbf{P} = M\mathbf{v}(G)} \quad (2.2)$$

On peut donc trouver l'expression de la résultante du torseur cinétique de façon très simple.

De la même façon si on redérive, on trouve  $\mathbf{D} = M\mathbf{a}(G)$ .

### B.3 Relation entre les moments

On va voir qu'il existe une relation entre les moments du torseur cinétique et du torseur dynamique. Pour cela on dérive le moment cinétique :

$$\frac{d\mathbf{L}(A)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{M \in S} \mathbf{AM} \wedge \mathbf{v}(M) dm = \iiint_{M \in S} \left( \frac{d\mathbf{AM}}{dt} \wedge \mathbf{v}(M) + \mathbf{AM} \wedge \frac{d\mathbf{v}(M)}{dt} \right) dm$$

Avec  $\frac{d\mathbf{AM}}{dt} = \mathbf{v}(M) - \mathbf{v}(A)$ , et  $\mathbf{v}(M) \wedge \mathbf{v}(M) = 0$  on a donc :

$$\frac{d\mathbf{L}(A)}{dt} = - \iiint_S \mathbf{v}(A) \wedge \mathbf{v}(M) dm + \boldsymbol{\delta}(M)$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}(A)}{dt} = M\mathbf{v}(G) \wedge \mathbf{v}(A) + \boldsymbol{\delta}(M)} \quad (2.3)$$

C'est une relation hyper importante, car nous verrons dans le chapitre suivant que le moment dynamique peut être relié au moment des forces extérieures. On s'en servira essentiellement quand le produit vectoriel est nul, c'est à dire quand :

- $\mathbf{v}(A) = 0$ , autrement dit A est un point fixe.
- $A = G$  : le cas le plus important.
- $\mathbf{v}(G) // \mathbf{v}(A)$  quel que soit t.

Cas particulier : si un solide roule sans glisser sur un support fixe, le point de contact du solide a une vitesse nulle : on pourra appliquer la relation.

Pour pouvoir utiliser la relation il faudra cependant pouvoir exprimer le moment cinétique.

### Théorème de Koenig

Le premier théorème de Koenig permet de relier le moment cinétique en un point O au moment cinétique en G dans le RCM :

$$\boxed{\mathbf{L}(O) = \mathbf{L}^*(G) + \mathbf{OG} \wedge M\mathbf{v}(G)} \quad (2.4)$$

**Démonstration** : La relation avec  $\mathbf{L}(G)$  au lieu de  $\mathbf{L}^*(G)$  découle directement de la définition du moment cinétique. De plus on a :

$$\mathbf{L}^*(G) = \iiint_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{v}^*(M) dm = \iiint_S \mathbf{GM} \wedge (\mathbf{v}(M) - \mathbf{v}(G)) dm$$

Le premier terme est directement  $\mathbf{L}(G)$ . Le second vaut :

$$- \iiint_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{v}(G) dm = \mathbf{v}(G) \wedge \iiint_S \mathbf{GM} dm = \mathbf{0}$$

D'où  $\mathbf{L}(O) = \mathbf{L}^*(G) + \mathbf{OG} \wedge M\mathbf{v}(G)$ . Cette relation permet de décomposer le moment en une contribution autour de G, et une contribution correspondant au moment en A de la quantité de mouvement globale. Le calcul du moment cinétique en un point quelconque pourra donc se ramener au calcul de  $\mathbf{L}^*(G)$ .

Energie cinétique

Par extension à partir de la définition pour un ensemble de points :

$$E_c = \iiint_S v(M)^2 / 2 dm$$



On décompose maintenant la vitesse en sa composante dans le RCM et la vitesse du centre de gravité :  $\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(G) + \mathbf{v}^*(M)$ . On a donc :

$$E_c = (1/2) \iiint_S (v(G)^2 + 2\mathbf{v}(G) \cdot \mathbf{v}^*(M) + v^*(M)^2) dm$$

Or  $\iint_S \mathbf{v}(G) \cdot \mathbf{v}^*(M) dm = \mathbf{v}(G) \cdot \iint_S \mathbf{v}^*(M) dm = 0$  avec la deuxième définition du barycentre. D'où l'expression de l'énergie cinétique :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M v(G)^2 \quad (2.5)$$

**Remarque** : Cette relation est aussi appelée le second théorème de Koenig. Il est très utile, car il permet de décomposer l'énergie cinétique d'un système entre celle liée à la translation,  $(1/2)Mv(G)^2$ , et celle qui est liée à la rotation,  $E_c^*$ .

Tout ce que nous venons de faire dans ce chapitre est valable pour *tous* les systèmes matériels, indéformables ou pas. Maintenant pour aller plus loin, et pouvoir exprimer le moment cinétique autrement que par une intégrale triple d'un produit vectoriel de la vitesse, il va falloir particulariser.

## C Cinétique des solides indéformables

### C.1 Rotation autour d'un point fixe

Pour un solide indéformable, on sait que le vecteur rotation permet de définir le mouvement à partir du torseur des vitesses. Si le solide possède un point fixe O (s'il n'en possède pas on changera de référentiel pour qu'il en ait un), on a donc :

$$\forall M \in S, \mathbf{v}(M) = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}$$

Et on peut exprimer le moment cinétique en O selon :

$$\mathbf{L}(O) = \iiint_S \mathbf{OM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}) dm$$

On voit donc que le vecteur rotation  $\boldsymbol{\Omega}$  définit complètement  $\mathbf{L}(O)$ . Il existe donc une application qui à  $\boldsymbol{\Omega}$  associe  $\mathbf{L}(O)$  : c'est l'opérateur d'inertie en O, noté  $J_O$ . Cette application dépend forcément du point O, elle serait différente pour le moment cinétique en un autre point fixe.

On montre facilement que  $J_O$  est un opérateur linéaire en  $\boldsymbol{\Omega}$  : on peut donc lui associer une matrice. De plus, si on prend  $\boldsymbol{\Omega}'$  un autre vecteur rotation on a :

$$\boldsymbol{\Omega}' \cdot J_O(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{L}(O) = \boldsymbol{\Omega}' \cdot \iiint_S \mathbf{OM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}) dm$$

D'où en permutant le produit mixte :

$$\boldsymbol{\Omega}' \cdot J_O(\boldsymbol{\Omega}) = (\boldsymbol{\Omega}' \wedge \mathbf{OM}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM}) = \boldsymbol{\Omega} \cdot J_O(\boldsymbol{\Omega}')$$

car l'expression est symétrique en  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\boldsymbol{\Omega}'$ . On voit donc que  $J_O$  est une application linéaire symétrique : sa matrice dans une base orthonormée est donc symétrique, avec 6 coefficients indépendants au lieu de 9. On pose

$$J_O = \begin{bmatrix} I_{Ox} & I_{Oxy} & I_{Oxz} \\ I_{Oxy} & I_{Oy} & I_{Oyz} \\ I_{Oxz} & I_{Oyz} & I_{Oz} \end{bmatrix}$$

C'est la matrice d'inertie du solide S dans la base  $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ . Le coefficient  $I_{Ox}$  est défini par

$$I_{Ox} = \hat{\boldsymbol{x}} \cdot J_O(\hat{\boldsymbol{x}}) = \iiint_S (\hat{\boldsymbol{x}} \wedge \mathbf{OM})^2 dm = \iiint_S r_x^2 dm$$

où la grandeur  $r_x^2 = (\hat{\boldsymbol{x}} \wedge \mathbf{OM})^2$  correspond tout simplement au carré de la distance du point courant M à l'axe Ox (faire un dessin) :  $r_x^2 = y^2 + z^2$ . Idem pour les autres termes diagonaux  $I_{Oy}$  et pour  $I_{Oz}$ . Ce sont les *moments d'inertie* de S par rapport aux axes Ox, Oy et Oz.

Mais que valent les termes non diagonaux ?

$$I_{Oxy} = \hat{\boldsymbol{x}} \cdot J_O(\hat{\boldsymbol{y}}) = \iiint_S (\hat{\boldsymbol{x}} \wedge \mathbf{OM}) \cdot (\hat{\boldsymbol{y}} \wedge \mathbf{OM}) dm$$

Or  $\hat{\boldsymbol{x}} \wedge \mathbf{OM} = (0, -z, y)$  et  $\hat{\boldsymbol{y}} \wedge \mathbf{OM} = (z, 0, -x)$ , d'où

$$I_{Oxy} = - \iiint_S xy dm$$

C'est le produit d'inertie du solide par rapport aux axes Ox et Oy. Les autres termes non diagonaux sont obtenus par permutation sur (x,y,z).

**Remarque 1** : a priori les termes non diagonaux sont non nuls  $\rightarrow$  la matrice  $J_O$  n'est pas diagonale  $\rightarrow \mathbf{L}(O)$  n'est pas parallèle à  $\boldsymbol{\Omega}$ .

**Remarque 2** : cette matrice est valable à un instant t. Si S peut se déplacer dans la base  $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ , à t + dt ce n'est plus la même matrice. Seul moyen pour que la matrice soit une constante : prendre des axes liés au solide. C'est ce qu'on fera en général.

**Remarque 3** Interprétation physique : les moments d'inertie correspondent à la répartition des masses, et la façon dont cette répartition modifie l'inertie du solide. Exemple d'un pendule : selon la longueur du fil on n'aura pas la même inertie, même si la masse est la même. Exemple d'un ballon de rugby : si on le fait tourner selon l'axe longitudinal, moins d'inertie que si on le fait tourner selon un axe transversal : la masse est plus près de l'axe dans le premier cas.

**Remarque 4** A priori on peut écrire  $\mathbf{L}(O) = J_O \boldsymbol{\Omega}$  uniquement pour un point fixe. Mais si on calcule  $\mathbf{L}(G)$ , on voit que ça marchera même si G n'est pas fixe.

On a donc un moyen de trouver  $\mathbf{L}(O)$  à partir de  $\boldsymbol{\Omega} : \mathbf{L}(O) = J_O \boldsymbol{\Omega}$ . Mais c'est un peu laborieux avec 6 intégrales à calculer. En général on peut simplifier ce problème.

## C.2 Axes principaux d'inertie

### C.2.1 Définition

Soit un solide S en rotation autour de O fixe. On se place dans  $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1)$  liée à S. La matrice d'inertie ne dépend pas du temps dans cette base. C'est une matrice symétrique à coefficients réels  $\Rightarrow$  elle est donc diagonalisable. On peut donc trouver 3 directions propres *orthogonales* (OX,OY,OZ) telles que la matrice  $J_O$  s'écrive dans cette base :

$$(J_O)_{XYZ} = \begin{bmatrix} I_{OX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{OY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{OZ} \end{bmatrix}$$

Si  $\boldsymbol{\Omega}$  est porté par un de ces axes, on aura donc tout simplement par exemple  $\mathbf{L}(O) = I_{OX} \boldsymbol{\Omega}$ , c'est à dire  $\boldsymbol{\Omega}$  *parallèle* à  $\mathbf{L}(O)$ . Les axes propres sont les *axes principaux d'inertie*. Si deux valeurs propres sont égales : on dit que la matrice est cylindrique. Si les 3 valeurs propres sont égales : matrice sphérique.

### C.2.2 Utilisation des symétries

**Plan de symétrie matérielle** Faire un dessin avec un objet symétrique par rapport à un plan  $\pi$ . La symétrie doit être par rapport à la distribution de masse (mais bon si on prend  $\rho$  homogène c'est aussi symétrie en volume). On prend O dans le plan de symétrie. On a alors, si l'axe Oz est perpendiculaire au plan :

$$I_{Oxz} = \iiint_S xz dm = 0$$

car pour x fixé l'intégrale sur z donne forcément zéro si la distribution de masse est symétrique. De même on a  $I_{Oyz} = 0$ . La matrice d'inertie est donc :

$$(J_O)_{XYZ} = \begin{bmatrix} I_{Ox} & I_{Oxy} & 0 \\ I_{Oxy} & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{bmatrix}$$

Elle n'est pas diagonale, mais si on considère une rotation d'axe Oz :  $\boldsymbol{\Omega} = \omega \hat{z}$  d'où :

$$\mathbf{L}(O) = J_O(\boldsymbol{\Omega}) = I_{Oz} \omega \hat{z}$$

Soit  $\mathbf{L}(O) = I_{Oz} \boldsymbol{\Omega}$  : cette relation montre que Oz est axe principal d'inertie au point O. Plus généralement : s'il existe un plan de symétrie, l'axe perpendiculaire à ce plan est axe principal.

Attention, pour une rotation d'axe différent de Oz on n'aura plus  $\mathbf{L}(O) = I_{Oz} \boldsymbol{\Omega}$ .

**Axe de symétrie matérielle** Faire un dessin. Cas particulier : axe de révolution. On prend  $z$  sur cet axe. On a alors :

$$I_{Oxz} = \iiint_S xz dm = 0 = I_{Oyz} = \iiint_S yz dm$$

car dans chaque intégrale double les intégrales sur  $x$  et  $y$  respectivement sont nulles par symétrie. L'axe  $Oz$  est donc axe principal en  $O$ ,  $\forall O \in Oz$ .

Si axe de révolution : tout plan contenant l'axe de révolution est plan de symétrie  $\Rightarrow Ox$  et  $Oy$  sont aussi des directions propres.

**Objet plan** Si l'objet est dans le plan  $(x,y)$ , on a nécessairement  $z = 0$  pour tout point de l'objet, soit  $I_{Oxz} = I_{Oyz} = 0$  :  $Oz$  est axe propre. On a aussi  $I_{Ox} + I_{Oy} = I_{Oz}$ .

**Objet 1D** Si l'objet est unidimensionnel selon  $Oz$ , on a nécessairement  $I_{Oz} = 0$ . On a aussi  $I_{Oxz} = I_{Oyz} = I_{Oxy} = 0$ , et  $I_{Ox} = I_{Oy}$  car pour tout point appartenant au solide  $x = 0$  et  $y = 0$ .

**Exemple** La boîte d'allumettes : elle a 3 moments d'inertie différents. La rotation par rapport à l'axe médian est instable.

### C.2.3 Exemples de calcul

**Tige de longueur  $2l$**  On prend  $Oz$  selon la tige. La densité linéique est  $\lambda$ . On a  $I_{Oz} = 0$  car la masse est sur l'axe  $Oz$ . On a aussi  $I_{Ox} = I_{Oy}$  par symétrie.

$$I_{Ox} = \lambda \int_{-l}^l z^2 dz = 2\lambda l^3/3 = Ml^2/3$$

$$J_O = \begin{bmatrix} Ml^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & Ml^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Disque** Rayon  $R$ , masse  $m$ , densité surfacique  $\sigma$ , axe  $Oz$ .

- La symétrie de révolution  $\Rightarrow J_O$  est diagonale.
- La symétrie de révolution  $\Rightarrow I_{Ox} = I_{Oy}$ .
- L'objet est plan  $\Rightarrow z = 0 \Rightarrow I_{Ox} + I_{Oy} = I_{Oz}$ .

La matrice d'inertie est donc de la forme :

$$J_O = \begin{bmatrix} I_{Oz}/2 & 0 & 0 \\ 0 & I_{Oz}/2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{bmatrix}$$

On peut calculer  $I_{Oz}$  :

$$I_{Oz} = \iint_S (x^2 + y^2) dm = \sigma \iint_S r^2 dS = \sigma \iint_S r^3 dr d\theta$$

Attention à bien exprimer l'élément de surface  $dS = r dr d\theta$  en coordonnées polaires. On a alors

$$I_{Oz} = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = \sigma\pi R^4/2 = MR^2/2$$

Et par conséquent :

$$J_O = \begin{bmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{bmatrix}$$

On peut aussi calculer  $I_{Oy}$  directement, mais c'est plus pénible :

$$I_{Oy} = \sigma \iint_S x^2 dm = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \sigma R^4/4\pi = MR^2/4$$

Si on fait tourner selon  $\boldsymbol{\Omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$  :  $\mathbf{L}(O) = MR^2\omega/2\hat{\mathbf{z}}$ . Mais si  $\boldsymbol{\Omega} = \omega_z \hat{\mathbf{z}} + \omega_x \hat{\mathbf{x}}$ , on a  $\mathbf{L}(O) = MR^2\omega_z/2\hat{\mathbf{z}} + MR^2\omega_x/4\hat{\mathbf{x}}$  qui n'est pas parallèle à  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Rotation autour d'un axe quelconque

Le solide S est en rotation autour de l'axe ( $\Delta$ ) de vecteur directeur  $\mathbf{u}$  :  $\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{u}$ . Le moment cinétique par rapport à O vaut  $\mathbf{L}(O) = J_O(\boldsymbol{\Omega}) = \omega J_O(\mathbf{u})$

On s'intéresse à  $L_\Delta$ , la projection de  $\mathbf{L}(O)$  sur ( $\Delta$ ) lui-même :

$$L_\Delta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}(O) = \omega \mathbf{u} \cdot J_O(\mathbf{u})$$

Or

$$\mathbf{u} \cdot J_O(\mathbf{u}) = \iiint_S (\mathbf{u} \wedge \mathbf{OM})^2 dm = \iiint_S r_\Delta^2 dm = I_\Delta$$

où  $r_\Delta$  désigne la distance du point courant à l'axe ( $\Delta$ ), et  $I_\Delta$  le moment d'inertie par rapport à cet axe.

On a donc :

$$\boxed{L_\Delta = I_\Delta \omega} \quad (2.6)$$

C'est vrai quel que soit ( $\Delta$ ) : à ne pas confondre avec la relation plus générale  $\mathbf{L}(O) = I_\Delta \boldsymbol{\Omega}$  qui serait une relation *vectorielle* seulement vraie si ( $\Delta$ ) est axe principal. La relation (2.6) est une relation scalaire valable uniquement pour la *projection* du moment cinétique  $\mathbf{L}$ .

### C.2.4 Théorème de Huygens

On considère le repère ( $T$ ) = ( $O, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ ) lié au référentiel fixe  $\mathcal{R}$ , et on introduit le référentiel du centre de masse lié à un solide S. Soit ( $T^*$ ) = ( $G, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ ) le repère associé au RCM, d'origine G. Soit un axe ( $\Delta$ ), de coefficient directeur  $\mathbf{u}$ . On veut exprimer le moment d'inertie  $I_\Delta$  du solide par rapport à ( $\Delta$ ).

Soit O appartenant à ( $\Delta$ ). On va considérer que le solide est en rotation à  $\omega$  autour de ( $\Delta$ ). On peut écrire :

$$\mathbf{L}(O) = \mathbf{L}(G) + \mathbf{OG} \wedge M\mathbf{v}(G)$$

D'où en faisant le produit scalaire par  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}(O) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}(G) + M \mathbf{u} \cdot (\mathbf{OG} \wedge M \mathbf{v}(G))$$

Or  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}(O) = L_{\Delta}(O) = I_{\Delta} \omega$  (cf paragraphe précédent). De même  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}(G) = L_{\Delta}(G) = I_{\Delta G} \omega$  où on fait apparaître le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle à  $(\Delta)$  passant par  $G$ . Par ailleurs  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{OG} \wedge \mathbf{v}(G)) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{OG} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OG})) = \omega (\mathbf{u} \wedge \mathbf{OG})^2 = \omega a^2$  avec  $a$  la distance entre l'axe  $(\Delta)$  et  $G$ . On a donc

$$\boxed{I_{\Delta} = I_{\Delta G} + Ma^2} \quad (2.7)$$

C'est le théorème de Huygens. Le résultat est indépendant du  $\Omega$  choisi pour la démonstration. Ce théorème permet de ramener le calcul du moment d'inertie par rapport à un axe au calcul du moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par  $G$ . En général on récupère des propriétés de symétrie.

**Remarque** : on peut montrer que de façon générale si on passe du point  $G$  au point  $O$ , tels que  $\mathbf{OG} = (X, Y, Z)$ , on peut écrire la nouvelle matrice d'inertie avec :

$$\begin{aligned} - I_{Ox} &= I_{Gx} + M(Y^2 + Z^2) \\ - I_{Oy} &= I_{Gy} + M(X^2 + Z^2) \\ - I_{Oz} &= I_{Gz} + M(X^2 + Y^2) \\ - I_{Oxy} &= I_{Gxy} - MXY \\ - I_{Oxz} &= I_{Gxz} - MXZ \\ - I_{Oyz} &= I_{Gyz} - MYZ \end{aligned}$$

les relations pour les termes diagonaux sont des cas particuliers d'application de (2.7). Pour deux points  $A$  et  $B$  quelconques, tels que  $AG^2 = a^2$  et  $BG^2 = b^2$ , on aura par extension  $I_{\Delta B} = I_{\Delta A} + M(b^2 - a^2)$ . S'ils sont situés à la même distance de  $G$ , mêmes moments d'inertie.

**Exemple** : On veut faire tourner la plaque circulaire de tout à l'heure par rapport à un axe perpendiculaire passant par le bord. Que vaut le moment d'inertie par rapport à cet axe? Huygens  $\Rightarrow I = MR^2/2 + MR^2 = 3MR^2/2$ .

### C.2.5 Rotation sans point fixe

S'il n'existe pas de point fixe dans le mouvement (rotation + translation) comment faire pour exploiter les résultats précédents?

Si on écrit le moment cinétique en  $G$  :

$$\mathbf{L}(G) = \iiint_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{v}(M) dm$$

Or on sait que

$$\forall M \in S, \mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(G) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GM}$$

D'où

$$\mathbf{L}(G) = \iiint_S \mathbf{GM} \wedge \mathbf{v}(G) dm + \iiint_S \mathbf{GM} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GM}) dm$$

Le premier terme vaut zéro, et on voit que l'on retrouve en  $G$  la même expression que pour un point fixe.

Ceci découle du fait que  $\mathbf{L}(G) = \mathbf{L}^*(G)$ , que l'on fait apparaître en considérant que  $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GM} = v^*(M)$  : Le résultat correspond au fait que dans le RCM,  $G$  est bien un point fixe.

Si le solide n'a pas de point fixe au cours de son mouvement, on se ramènera donc au calcul du moment cinétique en  $G$ .

Remarque : L'égalité  $\mathbf{L}(G) = \mathbf{L}^*(G)$  a pour conséquence

$$\mathbf{L}(O) = \mathbf{L}^*(G) + \mathbf{OG} \wedge M\mathbf{v}(G)$$

, c'est le 1er théorème de Koenig.

### C.3 Energie cinétique d'un solide

L'énergie cinétique vaut :

$$E_c = \iiint_S \frac{1}{2} v^2(M) dm = \iiint_S \frac{1}{2} \mathbf{v}(M) \cdot \mathbf{v}(M) dm$$

Or pour  $M$  point d'un solide indéformable de vecteur rotation  $\boldsymbol{\Omega}$ , on peut écrire :

$$\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(G) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GM}$$

En remplaçant un des deux  $\mathbf{v}(M)$  dans l'intégrale de l'énergie cinétique :

$$E_c = \iiint_S \frac{1}{2} \mathbf{v}(M) \cdot (\mathbf{v}(G) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GM}) dm$$

Or la première intégrale peut s'écrire :

$$\iiint_S \frac{1}{2} \mathbf{v}(M) \cdot \mathbf{v}(G) dm = \frac{1}{2} \mathbf{v}(G) \cdot \iiint_S \mathbf{v}(M) dm = \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(G)$$

Et pour la seconde on permute le produit mixte :

$$E_c = \iiint_S \frac{1}{2} \mathbf{v}(M) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GM}) dm = \iiint_S \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{GM} \wedge \mathbf{v}(M)) dm = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}(G)$$

D'où finalement :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(G) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}(G) = \frac{1}{2} [\mathbf{P}] \cdot [\mathbf{v}]} \quad (2.8)$$

avec  $[\mathbf{P}]$  torseur cinétique et  $[\mathbf{v}]$  torseur cinématique. Cette expression correspond exactement à ce qu'on aurait dans le cas d'un point matériel :  $E_c = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}/2$ .

**Remarque** : le produit des torseurs est indépendant du point où le moment est pris.

**Cas particuliers** :

**Translation**  $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{0}, \mathbf{V}\}$  indépendant du point, et  $[\mathbf{P}] = \{M\mathbf{V}, \mathbf{L}(P)\}_P$ . D'où  $E_c = (1/2)MV^2$ .

**Rotation autour d'un axe  $\Delta$**  Soit  $\mathbf{u}$  vecteur directeur de  $\Delta$  et  $O \in \Delta$ . On a respectivement  $[\mathbf{v}] = \{\omega\mathbf{u}, \mathbf{0}\}_O$  et  $[\mathbf{P}] = \{\mathbf{P}, \mathbf{L}(O)\}_O$ . D'où

$$E_c = \frac{1}{2}\omega\mathbf{u}\cdot\mathbf{L}(O) = \frac{1}{2}\omega L_\Delta = \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$$



# Chapitre 3

## Dynamique

### A Rappels : points matériels

Le principe d'inertie est un *postulat* : il suppose qu'il existe un référentiel  $\mathcal{R}_i$  tel que "tout point matériel libre possède un mouvement de translation uniforme" :  $\mathbf{v} = \text{cte}$ .

Si  $\mathcal{R}_g$  est un référentiel en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_i$  on aura les mêmes propriétés. Il existe donc une infinité de référentiels vérifiant la propriété. Tous ces référentiels sont dits *galiléens*.

Si dans  $\mathcal{R}_g$  la vitesse n'est pas constante, cela veut dire que le point n'est pas libre. On a alors :

$$\frac{d\mathbf{p}_{\mathcal{R}_g}}{dt} = \mathbf{f}$$

C'est le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel.

Dans un référentiel non galiléen il faut tenir compte des forces d'entraînement  $\mathbf{f}_e = -m\mathbf{a}_e$  et de Coriolis  $\mathbf{f}_c = -m\mathbf{a}_c$  qui s'exercent sur le point.

### B Forces sur un système matériel

On considère à présent un système matériel : celui-ci peut être discret ou continu.

#### B.1 Système discret

Ensemble de points  $M_i$  soumis à  $\mathbf{f}_i$ . On peut définir le moment de  $\mathbf{f}_i$  par rapport à O  $\mathcal{M}_i(O) = \mathbf{OM}_i \wedge \mathbf{f}_i$ . On définit alors le torseur des forces comme

- Résultante :  $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{f}_i$
- Moment en O :  $\mathcal{M}(O) = \sum_i \mathbf{OM}_i \wedge \mathbf{f}_i$

On a bien sûr la relation générale  $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(B) + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}$ .

## B.2 Système continu

On remplace les forces par des densités de force :  $\mathbf{f}_i \rightarrow \mathbf{f}_m$  densité massique ou  $\mathbf{f}_v$  densité volumique. On a donc  $d\mathbf{f} = \mathbf{f}_m dm = \mathbf{f}_v dV$  pour l'élément de masse ou l'élément de volume.

Le torseur des forces est défini par sommation, soit pour une distribution continue par une intégrale :

- Résultante  $\mathbf{F} = \iiint_{M \in S} \mathbf{f}_m(M) dm$
- Moment en O  $\mathcal{M}(O) = \iiint_{M \in S} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}_m(M) dm$

On peut distinguer dans ce torseur des forces plusieurs contributions : forces d'inertie qui définissent un torseur d'inertie, forces intérieures et forces extérieures. Dans le cas d'un système isolé le torseur des forces extérieures est nul, mais les autres forces sont toujours là.

Remarque : L'intérêt du torseur des forces : ça permet d'éviter de manipuler une distribution (une fonction de 3 variables), et de la remplacer par 2 vecteurs (=6 scalaires).

Remarque 2 : On a vu 4 torseurs, récapituler. Mêmes propriétés, mais ne pas confondre les résultantes/moments.

## C Principe fondamental de la dynamique

### C.1 Enoncé

On considère un système fermé (pas d'échange de matière). Le principe de la dynamique dit que :

$$\boxed{[\mathbf{D}] = [\mathbf{F}_{\text{ext}}] + [\mathbf{F}_{\text{inertie}}]} \quad (3.1)$$

#### Remarques

- Attention, les forces intérieures n'apparaissent pas.
- C'est applicable dans n'importe quel référentiel, à condition de tenir compte du torseur des forces d'inertie (entraînement et Coriolis). Si le référentiel est galiléen, pas de forces d'inertie.
- C'est une égalité torsorielle : elle est valable pour les résultantes et pour les moments, en n'importe quel point et n'importe quelle situation. On a donc

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{inertie}} \\ \delta(A) = \mathcal{M}_{\text{ext}}(A) + \mathcal{M}_{\text{inertie}}(A), \forall A \end{cases}$$

### C.2 Théorème de l'action et de la réaction

On considère un système 1 et un système 2 qui interagissent, l'ensemble étant isolé (figure 3.1). Le PFD pour chacun des systèmes s'écrit :

$$[\mathbf{D}_1] = [\mathbf{F}_{12}]$$

$$[\mathbf{D}_2] = [\mathbf{F}_{21}]$$

en notant  $[\mathbf{F}_{12}]$  le torseur des forces exercées par 2 sur 1. Et pour le système global qui est isolé :

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{0}]$$

Or par extensivité des grandeurs cinétiques on sait que

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{D}_1] + [\mathbf{D}_2]$$

d'où l'on tire finalement

$$\boxed{[\mathbf{F}_{21}] = -[\mathbf{F}_{12}]} \quad (3.2)$$

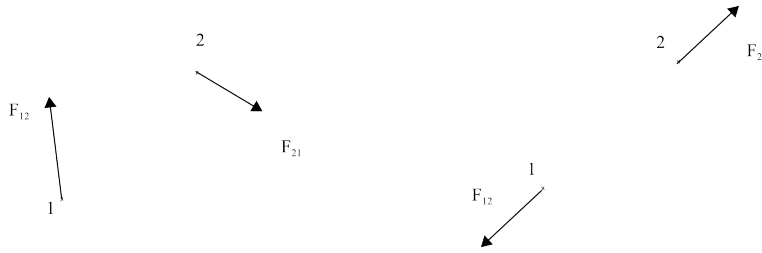


FIGURE 3.1 – Deux points matériels 1 et 2 en interaction : seule la configuration du schéma de droite vérifie le théorème de l'action et de la réaction. La configuration de gauche est impossible.

L'égalité sur les résultantes donne le théorème de l'action et de la réaction "classique". L'égalité sur les moments en O implique :

$$\mathbf{OM}_1 \wedge \mathbf{f}_{12} = \mathbf{OM}_2 \wedge \mathbf{f}_{21}$$

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \wedge \mathbf{f}_{21} = 0$$

On voit donc que la force exercée par 2 sur 1 est forcément dirigée de  $M_2$  vers  $M_1$ .

### C.3 Forces intérieures

On va faire le calcul dans le cas discret, et généraliser au cas continu. Considérons pour cela un système matériel discret composé de  $N$  points : la résultante des forces intérieures s'écrit

$$\mathbf{F}_{int} = \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}$$

où  $\mathbf{f}_{ij}$  désigne la force exercée par le point  $j$  sur le point  $i$ . On peut regrouper les  $\mathbf{f}_{ij}$  et les  $\mathbf{f}_{ji}$ , mais dans ce cas il faut faire attention à ne considérer qu'une seule fois le couple  $(i,j)$  dans la sommation :

$$\mathbf{F}_{int} = \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij} = \sum_i \sum_{j > i} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{0}$$

Donc on voit que la résultante du torseur des actions intérieures est nulle. De plus pour le moment :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{int}(O) &= \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{OM}_i \wedge \mathbf{f}_{ij} = \sum_i \sum_{j > i} \mathbf{OM}_i \wedge \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{OM}_j \wedge \mathbf{f}_{ji} \\ \mathcal{M}_{int}(O) &= \sum_i \sum_{j > i} (\mathbf{OM}_i - \mathbf{OM}_j) \wedge \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{[\mathbf{F}_{int}] = [0]} \quad (3.3)$$

Donc la résultante et le moment du torseur des actions intérieures sont nuls, et ce quel que soit le système : le torseur des forces intérieures est le torseur nul. Attention cependant, ce sont des quantités *globales*, et cela ne veut pas dire que  $\mathbf{f}_{ij} = \mathbf{0}$  en tout point du système : on verra en particulier que le travail des forces intérieures peut être différent de zéro malgré tout !! Exemple d'un ressort qu'on étire ou qu'on comprime : on aura  $\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \neq 0$  même si  $\int \mathbf{f} = 0$ .

Pour un solide indéformable, le torseur contient toute l'information  $\Rightarrow$  on pourra oublier les forces intérieures, et le travail sera nul. Mais pour un solide déformable, ce n'est pas le cas !! Le torseur ne suffit pas.

#### C.4 Théorème de la quantité de mouvement

On considère l'égalité des résultantes découlant du PFD :

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{inertie}$$

Or on a montré au chapitre précédent que  $\mathbf{D} = M\mathbf{a}(G)$ , d'où

$$\boxed{M\mathbf{a}(G) = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{inertie}} \quad (3.4)$$

avec seulement le premier terme si le référentiel est galiléen. Si le système est isolé on a donc  $\mathbf{P} = \text{constante}$ .

Donner l'expression des forces d'inertie : force d'entraînement et force de Coriolis.

#### C.5 Théorème du moment cinétique

On prend à présent l'égalité des moments :

$$\forall A, \delta(A) = \mathcal{M}_{ext}(A)$$

Or en cinétique nous avons vu que :

$$\delta(A) = \frac{d\mathbf{L}(A)}{dt} + M\mathbf{v}(A) \wedge \mathbf{v}(G)$$

Ainsi pour les cas particuliers où le produit vectoriel est nul,  $A$  fixe ou  $A = G$ , on aura :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}(A)}{dt} = \mathcal{M}_{ext}(A)} \quad (3.5)$$

C'est le théorème du moment cinétique. On peut l'appliquer en  $G$  pour être sûr de satisfaire la condition :

$$\frac{d\mathbf{L}(G)}{dt} = \mathcal{M}_{ext}(G)$$

On voit en particulier que si le système est isolé le moment cinétique est constant. Physiquement : le moment cinétique traduit la "quantité de rotation" du système, de la même façon que la quantité de mouvement traduit la "quantité de translation". Le PFD traduit le lien entre forces extérieures et les variations de ces "quantités". Le moment cinétique est aussi une quantité fondamentale en physique atomique : rotation de l'électron autour du noyau. La mécanique quantique introduira une quantification des valeurs de  $\mathbf{L}$  (notion de "spin").

Pour un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  de vecteur directeur  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{L}(O)}{dt} = \mathcal{M}_{ext}(O) \cdot \mathbf{u}$$

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}$$

avec  $\mathcal{M}_{\Delta}$  le moment des forces extérieures par rapport à l'axe  $\Delta$  et non plus par rapport à  $O$ . Faire un dessin pour montrer que pour un point  $M$  :  $\mathcal{M}_{\Delta} = \mathcal{M}(H)$  où  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe  $\Delta$ .

$$I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}$$

Donc on voit que si la force passe par l'axe  $\Delta \rightarrow \mathcal{M}_{\Delta} = 0$  et donc il y a conservation de la projection du moment cinétique  $L_{\Delta}$  (qui est indépendante du point de l'axe considéré).

### Exemples

- Patineur : en croisant les bras il diminue son moment d'inertie et augmente sa vitesse de rotation. Explication en termes de forces : c'est la force de Coriolis qui fait accélérer.
- Saut en longueur : si déséquilibre vers l'avant on a un moment cinétique négatif. En pédalant, le sauteur crée une contribution négative, et par conservation du moment cinétique total il bloque la rotation d'ensemble.

## D Forces entre solides

### D.1 Liaisons

**Définition** Degré de liberté : nombre de paramètres géométriques nécessaires et suffisants pour fixer la position spatiale d'un solide.

Pour un point matériel :  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Trois degrés de liberté, de translation. Pour un solide : il faut décrire la rotation. En général on la décrit avec les angles d'Euler : trois angles  $\theta$  (angle de mutation),  $\phi$  (angle de précession) et  $\psi$  (angle de rotation propre). Trois degrés de liberté supplémentaires : 6 degrés de liberté.

Mais lorsqu'on met des solides en contact on impose des contraintes entre ces degrés de liberté : exemple d'un cube posé sur une table. Si on suppose le contact permanent, 2 degrés de liberté de translation et un seul de rotation. Ça va dépendre de la nature du contact.

### Exemples de liaisons

**Liaison rotule** ou liaison sphérique : un solide  $S$  est limité à ses 3 degrés de liberté de rotation autour d'un point fixe. Exemple levier de vitesse. On parle d'articulation sphérique.

**Liaison pivot** ou liaison rotoïde : un seul degré de liberté de rotation (cavité cylindrique). Poignée de porte par rapport à la porte, porte par rapport aux gonds.

## D.2 Torseur des forces de liaison

C'est ce qu'on a calculé pour le tas de sable dans le premier TD. Pour simplifier, nous nous limiterons par la suite à des contacts ponctuels : en réalité une petite surface mais on fait l'hypothèse qu'elle tend vers zéro. Les éléments de réduction de  $[\mathbf{F}_I]$  : la résultante et le moment au point de contact  $\mathcal{M}_I(I)$ .

On projette ces éléments dans le plan tangent (plan de contact) et sur la normale. Pour la résultante on introduit donc  $\mathbf{R}_n$  et  $\mathbf{R}_t$  réactions normale et réaction tangentielle.  $\mathbf{R}_t$  est la force de résistance au glissement, c'est la force de frottement.

De la même façon  $\mathcal{M}_I(I) \rightarrow \mathbf{\Gamma}_n$  et  $\mathbf{\Gamma}_t$ , respectivement couple de résistance au pivotement et au roulement.

$\mathcal{M}_I(I)$  traduit le fait qu'en réalité le contact est non ponctuel, même si on a fait tendre la surface de contact vers zéro. Nous nous placerons parfois dans des cas où on peut négliger ces moments :  $\mathcal{M}_I(I) = \mathbf{0}$ , mais pas toujours. En pratique ces moments sont rarement négligeables : exemple de la toupie qui finit bien par s'arrêter, du tourniquet qui s'arrête lui aussi...

**Définition** Une liaison est dite parfaite si on a simultanément  $\mathcal{M}_I(I) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{R}_t = \mathbf{0}$ . On dit aussi liaison sans frottement.

## D.3 Lois de Coulomb

Ce sont des lois approximatives : elles sont déduites des observations expérimentales  $\rightarrow$  ce sont des modélisations. Il faut distinguer deux cas :

$\mathbf{v}_g \neq \mathbf{0}$  : La réaction tangentielle  $\mathbf{R}_t$  est opposée à la vitesse de glissement  $\mathbf{v}_g$  :

$$\mathbf{R}_t = -R_t \frac{\mathbf{v}_g}{\|\mathbf{v}_g\|}$$

avec  $R_t > 0$ . Et de plus il existe un coefficient constant  $K_d$  tel que

$$R_t = K_d R_n$$

avec  $K_d$  coefficient dynamique de frottement. Ce coefficient dépend uniquement de la nature du matériau (acier, bois, papier, etc.).

$\mathbf{v}_g = \mathbf{0}$  : Le solide est immobile par rapport au support, ou il roule sans glisser par exemple. On peut exercer une force tangentielle  $\mathbf{F}$  sur le solide, mais il refusera de glisser tant que cette force est inférieure à une force seuil  $F_0$  :  $\mathbf{R}_t = -\mathbf{F}$  avec la condition  $R_t < F_0$ . Si  $R_t$  dépasse  $F_0$  alors on déclenche le glissement.

De quoi dépend  $F_0$  ? La loi de Coulomb dit que  $F_0 = K_s R_n$  avec  $K_s$  coefficient statique de frottement. On a toujours  $K_s \geq K_d$ . En pratique on prend souvent  $K_s \approx K_d$ . La loi de Coulomb s'énonce alors :

$$\boxed{\|\mathbf{R}_t\| \leq K \|\mathbf{R}_n\|} \quad (3.6)$$

L'égalité correspond au cas où on a glissement. Discuter le nombre de degrés de liberté selon glissement ou pas.

**Remarque** Le fait que la force de frottement ne dépende pas de la surface n'est pas trivial. On pourrait penser qu'un objet qui a une surface plus étendue frotte plus qu'un objet avec une surface de contact réduite. En réalité, la surface de contact joue, mais la surface de contact "effective" : celle-ci est une fraction de la surface de contact apparente ; cette surface effective augmente quand on augmente la contrainte normale, car on déforme alors les contacts (la déformation est petite et donc élastique, réversible). La force de contact entre deux surfaces extrêmement planes (= métalliques) est plus forte que si les surfaces étaient rugueuses !! L'air joue également un rôle : dans le vide le frottement est plus fort (en réalité ce sont des forces de Van der Waals qui accrochent).

**Définition** On pose

$$\tan \phi = \frac{\|\mathbf{R}_t\|}{\|\mathbf{R}_n\|}$$

On a donc  $\tan \phi \leq K$ , avec  $\phi$  angle de frottement, qui vérifie  $\phi \leq \phi_0 = \arctan K$ . Cette condition définit un cône pour la direction de la réaction  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_n$  : c'est le cône de frottement. Cet angle a une interprétation simple : si le matériau est posé sur un plan incliné, c'est l'angle d'inclinaison à partir duquel il glisse.

**Application : Voiture** Quel doit être le coefficient de frottement  $f$  des pneus pour qu'une voiture puisse atteindre 100 km/h en 10 secondes ? On supposera que les roues motrices prennent 50% du poids de la voiture.

On calcule l'accélération  $a=10/3,6 = 2,77 \text{ m.s}^{-2}$ . On écrit ensuite qu'à la limite du glissement  $ma = 2F = 2(fmg/4) = fmg/2$  d'où  $f = 2a/g = 0,56$ . C'est un coefficient de frottement assez fort, mais en général le caoutchouc frotte bien sur le goudron. Si les pneus sont usés ça va glisser.

**Manip** Un stylo est posé sur deux doigts distants de  $L$  : on rapproche les doigts. A quel point arrive-t-on lorsque les doigts se rejoignent ?

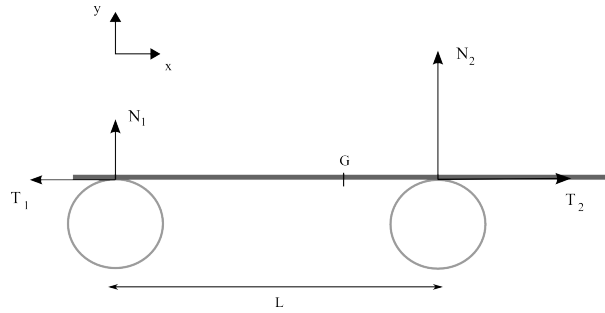


FIGURE 3.2 – Un stylo est posé en équilibre entre deux doigts. On rapproche les deux doigts : on converge vers le centre de gravité du stylo.

Le théorème du moment cinétique donne (en négligeant l'épaisseur du stylo) :

$$(L - x)N_2 = xN_1$$

avec l'origine au doigt 1,  $x$  repérant la position du centre de gravité  $G$  du stylo, et  $L$  la position du doigt 2. On voit donc que si  $G$  est plus proche de 2 on a :  $L - x < x$  implique  $N_1 < N_2$ . Si on suppose que le déplacement se fait très lentement, on peut négliger l'accélération de  $G \Rightarrow T_1 = T_2$ . Le seuil de glissement  $fN$  est plus rapidement atteint côté 1. Ce doigt se rapproche, mais en même temps  $N_1$  augmente et  $N_2$  diminue : une fois  $G$  plus proche de 1,  $T_1$  passera sous le seuil de glissement et  $T_2$  au-dessus, c'est alors 2 qui se rapproche de  $G$ , et ainsi de suite. On converge vers le centre de gravité.

## E Théorème de l'énergie cinétique

### E.1 Puissance d'un torseur de forces

Pour un point  $M$  soumis à une force  $\mathbf{f}$ , la puissance développée vaut  $\mathcal{P} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ . Le travail élémentaire entre  $t$  et  $t + dt$  vaut  $\delta W = \mathcal{P}dt = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$ .



**Exemple** Un point freine à partir de  $x = 0$  pour s'arrêter à  $x = L$ . Sa vitesse varie selon  $V(x) = V_0(L - x)/L$ . Calculer le travail de la force de frottement si a) il s'agit d'un frottement solide (glissement). b) d'un frottement visqueux de coefficient  $\lambda$ .

**Solution** Dans le cas a) on a  $W_{sol} = \int_0^L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = -\mu mgL$ . Dans le cas b) on aura  $W_{fl} = \int_0^L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^L -\lambda v \cdot d\mathbf{x} = -\lambda V_0 L/2$

Par extension, pour une distribution continue de masse et de densité massique de force  $\mathbf{f}_m$  :

$$\mathcal{P} = \iiint_{M \in S} \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v}(M) dm$$

Dans le cas d'un solide indéformable on peut exprimer la vitesse de M en fonction de celle de G :

$$\mathcal{P} = \iiint_S \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v}(G) dm + \iiint_S \mathbf{f}_m \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GM}) dm$$

$$\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(G) + \iiint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{GM} \wedge \mathbf{f}_m) dm = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(G) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathcal{M}(G)$$

$$\boxed{\mathcal{P} = [\mathbf{F}] \cdot [\mathbf{V}]} \quad (3.7)$$

Le produit est indépendant du point considéré. Dans le cas d'une translation on retrouve bien  $\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ . Dans le cas d'une rotation d'axe  $\Delta$ , on aura si on prend le moment d'un point O sur l'axe :

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathcal{M}(O) = \omega \mathcal{M}(O) \cdot \mathbf{u} = \mathcal{M}_{\Delta} \omega$$

**Cas du torseur de forces nul** On voit que pour un solide on aura nécessairement  $\mathcal{P} = 0$ , car  $[\mathbf{F}] = [\mathbf{0}]$ . Mais attention, dans le cas d'un système *déformable*, ce n'est plus nécessairement vrai, car  $\mathcal{P} \neq [\mathbf{F}] \cdot [\mathbf{V}]$ . Pour les forces intérieures en particulier, dans le cas d'un ressort, il faudra écrire l'intégrale des  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ .

## E.2 Puissance des forces de liaison $[\mathbf{F}_1]$

La puissance des forces de liaison exercées par  $S_1$  sur  $S_0$  est donnée par :

$$\mathcal{P}_{S_1/S_0} = [\mathbf{F}_{S_1/S_0}] \cdot [\mathbf{V}_{S_0/\mathcal{R}}]$$

De même, la puissance des forces de liaison exercées par  $S_0$  sur S vaut :

$$\mathcal{P}_{S_0/S_1} = [\mathbf{F}_{S_0/S_1}] \cdot [\mathbf{V}_{S_1/\mathcal{R}}]$$

Or le théorème de l'action et de la réaction dit que  $[\mathbf{F}_{S_1/S_0}] = -[\mathbf{F}_{S_0/S_1}]$ .

On a donc la puissance totale de la liaison :

$$\mathcal{P}_{liaison} = [\mathbf{F}_{S_0/S_1}] \cdot ([\mathbf{V}_{S_1/\mathcal{R}}] - [\mathbf{V}_{S_0/\mathcal{R}}]) = [\mathbf{F}_{S_0/S_1}] \cdot [\mathbf{V}_{S_1/S_0}]$$

Le produit peut-être exprimé au point de contact I :

$$\boxed{\mathcal{P}_{liaison} = \{\mathbf{R}, \mathcal{M}(I)\}_I \cdot \{\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}_g\}_I = \mathbf{R}_t \cdot \mathbf{v}_g + \mathcal{M}(I) \cdot \boldsymbol{\Omega}} \quad (3.8)$$

Si on a  $\mathcal{M}(I) = \mathbf{0}$  (pas de moment de frottement au point de contact) la puissance vaut tout simplement  $\mathbf{R}_t \cdot \mathbf{v}_g$ . Quand on a roulement sans glissement : pas de dissipation sauf si  $\mathcal{M}(I) \neq 0$ .

On voit que même si le torseur global de liaison est nul (ce sont des forces intérieures, dont la résultante et le moment valent zéro par le théorème de l'action et de la réaction) la puissance de la liaison n'est pas nulle!!! Il n'y a pas de contradiction, car la liaison entre deux solides indéformables n'est pas elle-même indéformable.

### E.3 Théorème de l'énergie cinétique

Pour un point en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , soumis à une force  $\mathbf{f}$  :

$$\delta W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = d(mv^2/2) = dE_c$$

Pour un système matériel soumis à  $\mathbf{f}_{int}$  et  $\mathbf{f}_{ext}$  on montre de même :

$$\boxed{dE_c = \delta W_{int} + \delta W_{ext}} \quad (3.9)$$

Attention,  $\delta W_{int}$  est le travail d'un torseur nul mais  $\delta W_{int} \neq 0$  a priori, sauf si le système est indéformable. Si le référentiel n'est pas galiléen, il faudra rajouter les forces d'inertie (d'entraînement, les forces de Coriolis ont toujours un travail nul). Dans le cas d'un solide indéformable, on peut exprimer la puissance des forces extérieures (celle des forces intérieures étant nulle) et on aura :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = [\mathbf{F}_{ext}] \cdot [\mathbf{V}]} \quad (3.10)$$

Rappel : l'énergie cinétique peut être exprimée pour un solide en fonction des torseurs cinématique et cinétique,  $E_c = (1/2) [\mathbf{P}] \cdot [\mathbf{V}]$ .

**Définition** Un torseur de forces dérive d'une énergie potentielle si son travail  $\delta W$  peut se mettre sous la forme  $\delta W = -dE_p$ . Les forces sont alors dites conservatives. Pour une force conservative, le travail pour aller de A à B ne dépend pas du chemin suivi :

$$\Delta W_{AB} = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B -dE_p = E_p(A) - E_p(B)$$

Le changement de signe correspond au fait que pour faire travailler la force conservative, il faut puiser de l'énergie potentielle.

**Exemple** Un point soumis à la gravité qui va de A à B : relier à la différence de hauteur, analyser le signe du résultat.

Soit  $E_{p_{int}}$  et  $E_{p_{ext}}$  les énergies potentielles associées aux forces conservatives intérieures et extérieures : on définit alors l'énergie mécanique  $E_m$  :  $E_m = E_c + E_{p_{int}} + E_{p_{ext}}$ . En l'absence de forces non conservatives (typiquement forces

de frottement) l'énergie mécanique sera conservée. Plus précisément, le théorème de l'énergie cinétique implique :

$$\boxed{dE_m = \delta W_{non\ conservatif}} \quad (3.11)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\Delta E_m = \Delta W_{non\ conservatif}$$

C'est une loi de conservation, à utiliser de préférence au théorème de l'énergie cinétique.

**Exemple** On considère un disque solide (masse  $m$ , rayon  $R$ ) roulant sur un support horizontal. Son centre se déplace à  $V_0$ , et la roue tourne à une vitesse angulaire  $\omega$ . On suppose qu'il y a glissement au point de contact : quel couple faut-il fournir au cylindre pour qu'il maintienne sa vitesse  $V_0$  et  $\omega$ ? La vitesse de glissement vaut  $V_0$ , et le travail des forces de frottement vaut :  $W_f = fmgV_0$ . Il faudra donc un couple  $\Gamma = fmgV_0/\omega$ .



# Chapitre 4

## Solides en rotation : applications

### A Pendule pesant

A rédiger.

### B Equilibrage

#### B.1 Equilibrage statique

On imagine un cylindre (masse  $M$ , rayon  $R$ ), qui tourne autour de son axe à une vitesse  $\omega$  constante. On lui rajoute une petite masse  $P$  (masse  $m$ ) sur le côté, à un rayon  $R$  et à une hauteur  $h$ . L'ensemble  $\{M, m\}$  constitue donc un solide. On appelle  $\mathbf{F}_1$  la force de liaison nécessaire pour maintenir le cylindre sur son axe : que vaut cette force en fonction de  $\omega$  ?

Le PFD pour le système global s'écrit :

$$m\mathbf{a}(P) = \mathbf{F}_1 + (M + m)\mathbf{g}$$

car le centre  $G$  du cylindre est fixe  $\mathbf{a}(G) = 0$ . En exprimant l'accélération de  $P$ , on obtient donc :

$$\mathbf{F}_1 = -(M + m)\mathbf{g} - mR\omega^2\hat{\mathbf{r}}$$

On voit que la masse qui brise la symétrie rajoute un terme en  $\omega^2$ , c'est un terme dangereux qui peut causer la rupture du système pour les grandes vitesses de rotation. Le problème vient du fait que le centre de gravité du système global n'est pas sur l'axe de rotation. On peut tester ça sur une roue en la mettant sur un axe horizontal : si son angle de rotation est indifférent, c'est qu'il n'y a pas de dissymétrie. Sinon elle tourne pour mettre la masse  $m$  au point le plus bas. S'il y a une dissymétrie, on peut a priori la supprimer en mettant une masse de l'autre côté pour compenser (mais attention, cf paragraphe suivant). C'est l'équilibrage statique.

## B.2 Equilibrage dynamique

On applique le théorème du moment cinétique en O appartenant à l'axe de rotation, avec le moment cinétique global qui vaut :

$$\mathbf{L}(O) = \mathbf{L}_{cyl}(O) + \mathbf{L}_P(O)$$

Pour le cylindre, le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation vaut  $I_{cyl} = MR^2/2$ , d'où  $\mathbf{L}_{cyl}(O) = (1/2)MR^2\omega\hat{\mathbf{z}}$ . De même on peut exprimer le moment cinétique de la masse P :

$$\mathbf{L}_P(O) = m\mathbf{OM} \wedge \mathbf{v}(P) = m(R\hat{\mathbf{r}} + h\hat{\mathbf{z}}) \wedge R\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

D'où le moment cinétique total :

$$\mathbf{L}(O) = (m + M/2)R^2\omega\hat{\mathbf{z}} - mRh\omega\hat{\mathbf{r}}$$

On voit déjà le problème : le moment cinétique n'est pas selon  $\hat{\mathbf{z}}$ , cet axe n'est plus axe principal d'inertie à cause de la masse P.

Soit  $\mathcal{M}_l(O)$  le couple extérieur à appliquer en O pour maintenir l'ensemble à sa place : que vaut-il ? On applique le théorème du moment cinétique en O pour le trouver :

$$\frac{d\mathbf{L}(O)}{dt} = \mathcal{M}_l(O) + \mathbf{OP} \wedge m\mathbf{g}$$

D'où :

$$\mathcal{M}_l(O) = -\mathbf{OP} \wedge m\mathbf{g} + mRh\omega^2\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Le premier terme n'est là que si l'équilibrage statique n'a pas été fait. Le second terme est là même si l'équilibrage statique a été fait. Il traduit que l'axe de rotation n'est pas axe principal d'inertie : ce terme implique un couple tournant sur le cylindre. Pour le virer, il suffit par exemple que la distribution de masse soit symétrique : attention donc à la façon utilisée pour compenser m lors de l'équilibrage statique. Cette deuxième condition est l'équilibrage dynamique.

## C Effets gyroscopiques

### C.1 Angles d'Euler

Soit  $\mathcal{R}$  référentiel galiléen et  $(O, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$  un repère associé. On suppose que le solide est en rotation autour d'un point fixe O, que l'on prend sur l'origine. On introduit un repère lié au solide  $(O, \hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{z}}')$ .

Les angles d'euler sont :

- L'angle de mutation  $\theta = (Oz, Oz')$  : c'est l'angle d'inclinaison du solide.
- On considère l'intersection de  $Ox'y'$  et  $Oxy$  : elle définit une direction  $\hat{\mathbf{u}}$ .  
L'angle de précession vaut  $\phi = (Ox, \hat{\mathbf{u}})$ . Correspond à la direction dans laquelle on s'est incliné. Si  $z'$  tourne, on dit que le solide précesse.
- Pour terminer on définit  $\psi = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}')$ , l'angle de rotation propre.

Ces trois angles définissent complètement la position du solide. Le vecteur rotation vaut alors :  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{u}} + \dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\psi}\hat{\mathbf{z}}'$ .

## C.2 Approximation gyroscopique

Elle revient à supposer que :

$$\begin{cases} |\dot{\psi}| \gg \dot{\phi}, \dot{\theta} \\ \Delta E_p \ll E_c \end{cases}$$

Si les liaisons sont parfaites on aura conservation de l'énergie mécanique pour le système isolé, soit  $E_m = E_p + E_c \approx E_c = \text{constante}$ . Or l'énergie cinétique vaut  $E_c = I_z \dot{\psi}^2 / 2$ , d'où  $\dot{\psi} \approx \text{constante}$  (en réalité les frottements vont ralentir la rotation).

On considère une toupie : elle est stabilisée sur sa pointe, alors que sans la rotation elle tomberait. Si on la pousse dans une direction, elle part dans une direction perpendiculaire. Ce comportement est dû au *couple gyroscopique*. Pour comprendre d'où vient ce couple, on compare le mouvement de la toupie à celui qu'elle aurait *sans* la rotation. On décompose le moment cinétique  $\mathbf{L}$  en une composante qui contient la rotation rapide d'angle  $\psi$ , et une composante  $\mathbf{L}'$  qui contient toutes les autres rotations :

$$\mathbf{L} = I\dot{\psi}\hat{\mathbf{z}}' + \mathbf{L}'$$

$\mathbf{L}'$  contient par exemple le basculement de la toupie. Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathcal{M}_{ext} \\ \frac{d\mathbf{L}'}{dt} + I\dot{\psi}\frac{d\hat{\mathbf{z}}'}{dt} &= \mathcal{M}_{ext} \end{aligned}$$

car  $\dot{\psi} = \text{constante}$ . Cette expression montre que par rapport au cas où la rotation propre est absente, la rotation rapide revient à rajouter dans les moments extérieurs un couple  $-I\dot{\psi}\frac{d\hat{\mathbf{z}}'}{dt}$  : c'est le couple gyroscopique. Si on impose une rotation  $\boldsymbol{\Omega}_c$  à l'axe du gyroscope on a  $\frac{d\hat{\mathbf{z}}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_c \wedge \hat{\mathbf{z}}'$ . Donc le couple gyroscopique vaut :

$$\boldsymbol{\Omega}_g = I\dot{\psi}\hat{\mathbf{z}}' \wedge \boldsymbol{\Omega}_c$$

Ce couple tend à faire tourner le gyroscope dans une direction perpendiculaire à celle qu'on lui impose et perpendiculaire à son axe de rotation propre. C'est contre intuitif ! Quand la toupie tourne le poids aurait tendance à la faire tomber, mais le couple gyroscopique la fait tourner en précession et elle ne tombe pas. Physiquement on peut montrer que ce couple tire son origine des forces de Coriolis dues à la rotation propre.

### Exemples

**Roue de vélo** Prendre une roue de vélo tournant autour de son axe, et faire pivoter l'axe : on ressent un couple dans la direction perpendiculaire.

**Toupie** Précession de la toupie : perpendiculaire au couple exercé par la gravité et à l'axe de la toupie.

**Précession des équinoxes** La terre tourne sur rapidement sur elle-même : c'est un gyroscope. Son axe est incliné par rapport au plan de rotation autour du soleil (plan de l'écliptique), et cet axe garde une direction constante car le système est isolé : pointe toujours vers l'étoile polaire. En réalité on peut montrer que la non-sphéricité de la terre (due aux forces de marée) induit un couple extérieur et donc une précession de l'axe de rotation. Cette précession est très lente : en 2000 ans l'axe a tourné de 30 degrés. Mais pas négligeable : la constellation du Bélier d'il y a 2000 ans est passée dans le Taureau pour une même date aujourd'hui (il faut retrancher un signe aux signes astrologiques conventionnels, calculés il y a 2000 ans!!).

## D Boîte d'allumettes

On considère le mouvement d'une boîte d'allumettes lancée en l'air dans son RCM. On introduit les trois axes d'inertie  $I_x, I_y$  et  $I_z$  passant par G. Son vecteur rotation vaut  $\boldsymbol{\Omega} = \omega_x \hat{\mathbf{x}}' + \omega_y \hat{\mathbf{y}}' + \omega_z \hat{\mathbf{z}}'$ , exprimé dans la base  $(G, \hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{z}}')$  liée à  $\mathcal{R}'$ . Attention, les  $\omega_i$  dépendent du temps.

Le moment cinétique vaut donc  $\mathbf{L}^*(G) = I_x \omega_x \hat{\mathbf{x}}' + I_y \omega_y \hat{\mathbf{y}}' + I_z \omega_z \hat{\mathbf{z}}'$ . Il est exprimé dans la base de S, mais c'est bien le moment cinétique dans le RCM. Le théorème du moment cinétique dans le RCM (on est obligé de l'appliquer dans le RCM, car on a exprimé le moment cinétique par rapport à ce référentiel!) dit qu'en l'absence de moments extérieurs en G (car le poids passe par G et donc son moment est nul) :

$$\left. \frac{d\mathbf{L}^*(G)}{dt} \right|_* = \mathbf{0}$$

On veut relier ça à la dérivée dans  $\mathcal{R}'$  référentiel lié à la boîte, car  $\boldsymbol{\Omega}$  est exprimé dans cette base :

$$\left. \frac{d\mathbf{L}^*(G)}{dt} \right|_* = \left. \frac{d\mathbf{L}^*(G)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}^*} \wedge \mathbf{L}^*(G)$$

On arrive donc au système :

$$\begin{vmatrix} I_x \dot{\omega}_x \\ I_y \dot{\omega}_y \\ I_z \dot{\omega}_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ I_z \omega_z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

D'où :

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = 0 \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = 0 \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations d'Euler.



**Stabilité** On lance la boîte pour la faire tourner dans un sens donné : on privilégie un axe, on aura donc un des  $\omega$  plus grand que les autres. Si on lance selon Oz, le terme en  $\omega_x\omega_y$  est négligeable, et donc  $\omega_z = \text{constante}$ . Pour les autres rotations on peut résoudre en substituant les deux équations qui restent, et on trouve :

$$\ddot{\omega}_x + \left[ \frac{(I_z - I_y)(I_z - I_x)}{I_x I_y} \omega_z^2 \right] \omega_x = 0$$

La stabilité de la rotation selon  $\omega_x$  dépendra du signe du facteur  $(I_z - I_y)(I_z - I_x)$ . Si ce facteur est positif : stable. S'il est négatif : instable. On voit que c'est négatif si  $I_z$  est compris entre  $I_y$  et  $I_x$  : la rotation par rapport à l'axe moyen est instable!!



# Table des matières

A	Motivation . . . . .	3
B	Outils mathématiques . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Cinématique</b>	<b>5</b>
A	Champ de vitesse d'un solide indéformable . . . . .	5
A.1	Torseur cinématique . . . . .	5
A.2	Vecteur rotation . . . . .	7
B	Cinématique du contact de deux solides . . . . .	8
C	Changement de référentiel . . . . .	9
C.1	Dérivation d'un vecteur . . . . .	9
C.2	Vitesses . . . . .	10
C.3	Accélérations . . . . .	11
C.4	Rotations . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Cinétique</b>	<b>13</b>
A	Centre de gravité . . . . .	13
B	Torseurs cinétique et dynamique . . . . .	15
B.1	Définition . . . . .	15
B.2	Propriété des résultantes . . . . .	15
B.3	Relation entre les moments . . . . .	16
C	Cinétique des solides indéformables . . . . .	17
C.1	Rotation autour d'un point fixe . . . . .	17
C.2	Axes principaux d'inertie . . . . .	19
C.3	Energie cinétique d'un solide . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Dynamique</b>	<b>25</b>
A	Rappels : points matériels . . . . .	25
B	Forces sur un système matériel . . . . .	25
B.1	Système discret . . . . .	25
B.2	Système continu . . . . .	26
C	Principe fondamental de la dynamique . . . . .	26
C.1	Enoncé . . . . .	26
C.2	Théorème de l'action et de la réaction . . . . .	26
C.3	Forces intérieures . . . . .	27
C.4	Théorème de la quantité de mouvement . . . . .	28

	C.5	Théorème du moment cinétique . . . . .	28
D		Forces entre solides . . . . .	29
	D.1	Liaisons . . . . .	29
	D.2	Torseur des forces de liaison . . . . .	30
	D.3	Lois de Coulomb . . . . .	30
E		Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	32
	E.1	Puissance d'un torseur de forces . . . . .	32
	E.2	Puissance des forces de liaison $[\mathbf{F}_1]$ . . . . .	33
	E.3	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	34
<b>4</b>		<b>Solides en rotation : applications</b>	<b>37</b>
	A	Pendule pesant . . . . .	37
	B	Equilibrage . . . . .	37
		B.1 Equilibrage statique . . . . .	37
		B.2 Equilibrage dynamique . . . . .	38
	C	Effets gyroscopiques . . . . .	38
		C.1 Angles d'Euler . . . . .	38
		C.2 Approximation gyroscopique . . . . .	39
	D	Boîte d'allumettes . . . . .	40